# Teoria dei giochi

## Prof. Andrea Calogero

***OBIETTIVO DEL CORSO E RISULTATI DI APPRENDIMENTO ATTESI***

Lo scopo del corso è quello di mostrare come situazioni di scelte interattive possano essere studiate dal punto di vista matematico per migliorare i risultati ottenuti dagli individui e dalla collettività. Per fare questo si forniranno agli studenti le idee principali e gli strumenti fondamentali della teoria matematica dei giochi, proponendo attenzione ad alcuni esempi di applicazioni.

Al termine dell’insegnamento, lo studente sarà in grado di:

descrivere situazioni quotidiane dal punto di vista della teoria dei giochi;

costruire modelli matematici che descrivano situazioni di interazione, discuterne i principali aspetti, riconoscere limiti e potenzialità dei modelli creati;

dimostrare i risultati principali della teoria dei giochi;

analizzare e risolvere esempi di giochi cooperativi e non cooperativi.

***PROGRAMMA DEL CORSO***

Di seguito, i numeri delle definizioni, dei teoremi e degli esempi si riferiscono al libro di testo del corso [1]. Le dimostrazioni svolte sono indicate con (DIM). Sono stati svolti alcuni esercizi-esempi: quelli del libro sono indicati, quelli della lista [2] sono stati indicati solo in parte. Sono stati svolti alcuni modelli che è richiesto saper introdurre e risolvere.

**1. INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEI GIOCHI**

**Problemi di decisione.** Insieme delle alternative. Relazione di preferenza. Definizione (1.1.1) di problema di decisione.

**Funzione di utilità.** Definizione (1.2.1) di funzione di utilità. Esempio (1.2.2) di problema di decisione senza funzione di utilità: ordine lessicografico. Una condizione sufficiente per l’esistenza di una funzione di utilità (Proposizione 1.2.1 con DIM).

**Funzioni di utilità lineari.** Problema di decisione convesso. Definizione (1.3.1) di funzione di utilità lineare. Definizione insieme delle lotterie.

Definizione (1.3.4) di funzione di utilità di von Neumann e Morgenstern. Condizione necessaria e sufficiente per l’esistenza di una utilità di von Neumann e Morgenstern (Proposizione 1.3.4 con DIM).

**2. GIOCHI STRATEGICI**

**Introduzione ai giochi strategici.** Definizione (2.1.1) di gioco strategico. Alcuni esempi: il dilemma dei prigionieri (esempio 2.1.1).

**Equilibrio di Nash in giochi strategici.** Definizione (2.2.1) di equilibrio di Nash. Definizione di corrispondenze: corrispondenze Upper SemiContinue. La definizione (2.2.2) della corrispondenza *Best Replies* (BR). Alcuni esempi: Il dilemma dei prigionieri (esempio 2.2.1), pari e dispari (esempio 2.2.6), duopolio di Cournot (esercizio 1.1.11), modello di Bertrand (esercizio 1.1.8). Esercizi vari.

Elementi introduttivi alla dimostrazione del teorema di punto fisso di Kakutani: insieme finito di punti affinementi indipendenti, caratterizzazione dei punti affinementi indipendenti (DIM), k-simplesso, *dissection* di un k-simplesso, teorema (2.13.3) di punto fisso di Brouwer. Teorema (2.2.1) di punto fisso di Kakutani (DIM). Elementi introduttivi alla dimostrazione del teorema di Nash: funzioni quasi concave; una funzione concava è quasi concava (DIM), il contrario è falso. La regolarità della corrispondenza BR (Proposizione 2.2.2 con DIM). Teorema (2.2.3) di Nash (DIM).

**Giochi a due giocatori a somma zero.** Definizione (2.3.1) di gioco a due giocatori a somma zero. Definizione (2.3.2) di valore inferiore, valore superiore; definizione (2.3.4) di valore e di strategie ottime per i singoli giocatori. Alcuni esempi: esempio 2.3.1, pari e dispari (esempio 2.2.6), esempio 2.3.4. Esercizi vari. Equilibrio di Nash come punto di sella. Relazione tra l’esistenza di equilibrio di Nash e il valore del gioco (Proposizioni 2.3.1 e 2.3.2 con DIM).

**Estensione miste di giochi finiti.** Gioco finito. Definizione (2.4.2) di estensione mista di gioco finito. Esempi: pari e dispari (esempio 2.3.2). Teorema (2.4.1) di Nash (DIM). Definizione (2.4.3) di supporto per una strategia mista e di corrispondenza *Pure Best Replies* (PBR). Caratterizzazione degli equilibri di Nash (Proposizione 2.4.2). Esercizi vari.

**Estensione mista di giochi finiti a due giocatori (bimatrix game).** Definizione (2.5.1) di bimatrix game. Esempi: battaglia dei sessi (esempio 2.5.1).

**Estensione mista di giochi finiti a due giocatori a somma zero (matrix game).** Definizione (2.6.1) di matrix game. Esempi: pari e dispari (esempio 2.3.2), modello di difesa del territorio (esercizio 1.4.4). Teorema (2.6.2) di minimax di Von Neumann. Algoritmo per 2xm-matrix game. Esercizi vari.

**Strategie strettamente dominanti ed eliminazione iterata.** Definizione (2.12.3) di strategia strettamente dominata. Caratterizzazione di strategie non strettamente dominate (Lemma 2.12.3 con DIM); eliminazione iterata di strategie strettamente dominate. Esercizi vari.

**3. GIOCHI IN FORMA ESTESA**

**Introduzione ai giochi in forma estesa.** Definizione (3.1.1) di gioco a n giocatori in forma estesa. Alcuni esempi: un gioco di carte (esempio 3.1.2 ed esercizio 2.2.4), la roulette russa (esercizio 2.2.12), absent-minded driver (esercizio 2.1.10). Definizione (3.1.2) di gioco a informazione perfetta e definizione (3.1.3) di gioco a memoria perfetta: loro relazioni.

**Strategie in giochi in forma estesa: pure, miste, comportamentali.** Definizioni (3.2.1) di strategia pura e profilo di strategia pura; definizione (3.2.2) di strategia comportamentale e profilo di strategia comportamentali. Il gioco strategico GΓ associato al gioco in forma estesa Γ (strategie pure) ed estensione mista E(GΓ) del gioco strategico associato al gioco Γ (strategie miste).

Definizioni (3.2.3) di strategie comportamentali e strategie miste equivalenti, (3.2.4) a realizzazione equivalente, (3.2.5) payoff equivalenti: loro relazioni. Teorema (3.2.1) di Kuhn (DIM). Esercizi vari, esempio 3.3.1.

Definizione (3.3.2) di equilibrio di Nash di Γ per un gioco in forma estesa Γ (strategie comportamentali). Caratterizzazione (Proposizione 3.3.1) degli equilibri di Nash di Γ che sono equilibri di Nash di GΓ (DIM). Teorema (3.3.2) di esistenza di equilibri di Nash di Γ per un gioco Γ a memoria perfetta (DIM). Teorema (3.3.3) di equivalenza tra equilibrio di Nash di Γ e equilibri di Nash di E(GΓ) per un gioco Γ a memoria perfetta (DIM). Alcuni esempi: un gioco di carte (esempio 3.1.2 ed esercizio 2.2.4), gioco di poker semplificato (esercizio 2.1.11), la roulette russa (esercizio 2.2.12). Esercizi vari.

**Equilibri perfetti nei sottogiochi.** Definizione (3.4.1) di decomposizione e (3.4.2) di sottogioco. Definizione (3.4.3) di equilibrio perfetto nei sottogiochi. Il metodo di induzione a ritroso (Proposizione 3.4.1). Teorema (3.4.2) di esistenza di un equilibrio perfetto nei sottogiochi di Γ (DIM). Teorema (3.4.3) di esistenza di un equilibrio in strategia pura perfetto nei sottogiochi di Γ (DIM).

Alcuni esempi: esempio 3.4.2, il gioco dei millepiedi (esempio 3.4.3 ed esercizio 2.3.3), modello di competizione tra negozi (esercizio 2.3.9). Esercizi vari.

**4. GIOCHI COOPERATIVI**

Definizione di coalizione. Definizione di insieme comprensivo e di involucro comprensivo.

**Giochi a utilità non trasferibile (NTU-game).** Definizione (5.2.1) di gioco a utilità non trasferibile (NTU-game) a *n* giocatori. Definizione (5.2.1) di allocazione fattibile e di insieme fattibile. Esempio 5.2.1.

**Problemi di contrattazione.** Definizione (5.3.1) di problema di contrattazione a *n* giocatori. Un problema di contrattazione è un NTU-game (Osservazione 5.3.1 DIM). Pareto dominanza e Pareto efficienza. Definizione (5.3.2) di allocazione. Esiste unico punto che massimizza gd su Fd (Proposizione 5.3.1 DIM). Definizione (5.3.3) di soluzione di Nash per un problema di contrattazione: significato geometrico. Una soluzione di Nash è una regola di allocazione Pareto efficiente (Teorema 5.3.3). Esercizi vari.

**Giochi a utilità trasferibile (TU-game).** Definizione gioco a utilità trasferibile (TU-game) a *n* giocatori. Ogni TU-game può essere visto come un NTU-game (Osservazione 5.4.1 DIM). Allocazione efficiente, individualmente razionale e collettivamente razionale. Definizione (5.5.1) di insieme delle imputazioni I(v) e definizione (5.5.2) di nucleo C(v). Definizione (5.4.3) di gioco superadditivo: se la funzione caratteristica del gioco è superadditiva, allora I(v) è non vuoto (DIM “geometrica”). Esempi: dividere un milione tra nipoti (esempio 5.4.1 ed esercizio 3.2.2). Esercizi vari. Definizione (5.6.1) di regola di allocazione per un TU-game. Allocazione efficiente (E), con proprietà del giocatore nullo (GN), simmetrica (S), additiva (A). Definizione (6.6.3) di valore di Shapley. Il valore di Shapley è l’unica allocazione che soddisfa (E), (GN), (S) e (A) (Teorema 5.6.1). Alcuni esempi: il gioco dei tre musicisti (esercizio 3.2.4), the airport problem (sezione 5.10 ed esercizio 3.2.8). Esercizi vari.

***BIBLIOGRAFIA***

[1] J. González-Diaz, I. García-Jurado, M.G. Fiestras-Janeiro, *An introductory course on mathematical game theory,* American Mathematical Society

[2] R. Lucchetti, *A primer in game theory,* Esculapio, 2011.

[3] M. Maschler, E. Solan, S. Zamir, *Game theory,* Cambridge University Press, 2013.

[4] A. Calogero, R. Pini, *Esercizi di teoria dei giochi,* disponibile sul sito del corso.

***DIDATTICA DEL CORSO***

Lezioni in aula o mediante gli strumenti di e-learning (a seconda dell’evoluzione dell’emergenza sanitaria). Ulteriore materiale didattico sul sito de corso.

***METODO E CRITERI DI VALUTAZIONE***

L’esame prevede lo svolgimento di una prova scritta.

La prova scritta prevede lo svolgimento di alcuni esercizi e risposte aperte ad alcune domande di teoria con dimostrazioni. La prova scritta valuta le conoscenze degli studenti degli argomenti affrontati durante il corso, la capacità di risolvere gli esercizi, la capacità di dimostrare i teoremi principali e di applicare in contesti diversi i risultati principali.

La prova orale serve per commentare con gli studenti l’esito della prova scritta. Durante la prova orale vengono valutate le capacità di correggere gli errori commessi, di contestualizzare gli esercizi all’interno della teoria e di utilizzare gli strumenti matematici presentati durante il corso.

Gli esami potrebbero essere svolti in modalità telematica a seconda dell’evoluzione dell’emergenza sanitaria.

***AVVERTENZE E PREREQUISITI***

Lo studente dovrà possedere conoscenze di base dell’analisi matematica.

*Orario e luogo di ricevimento degli studenti*

Gli studenti verranno ricevuti su appuntamento. Qualsiasi informazione può essere chiesta al docente all’indirizzo andrea.calogero@unimib.it.