# Fondamenti della matematica

## Prof. Antonino Ventura

***OBIETTIVO DEL CORSO E RISULTATI DI APPRENDIMENTO ATTESI***

Obiettivo del corso

L’insegnamento si propone di fornire agli studenti un’analisi del problema dei fondamenti della matematica, in particolare della cosiddetta crisi dei fondamenti e del suo superamento, a partire dalle principali acquisizioni di filosofia della matematica fino ai più recenti e significativi contributi delle scuole fondazionali.

Risultati di apprendimento attesi

Al termine dell’insegnamento lo studente sarà in grado di descrivere l’evoluzione del metodo assiomatico, cogliere con chiarezza le implicazioni della “rivoluzione non euclidea” e il significato della “crisi dei fondamenti”, conoscere l’assiomatizzazione della teoria degli insiemi, le diverse posizioni sul problema dei fondamenti e il “programma hilbertiano”, comprendere la rappresentazione della sintassi di una teoria formale in un sistema assiomatico dell’aritmetica, dimostrare i teoremi di incompletezza e i relativi lemmi e corollari, precisare le loro conseguenze e il loro significato, confrontare i principali contributi fondazionali elaborati dopo la formulazione dei teoremi di Gödel, analizzare le reazioni al fondazionalismo, individuare le ragioni delle applicazioni del metodo assiomatico alla fisica.

Lo studente, inoltre, sarà capace di utilizzare il linguaggio formale dei predicati del primo ordine con identità, di applicare in vari modi, per compiere derivazioni all’interno delle teorie, le procedure dimostrative del calcolo di deduzione naturale formulato per sequenze, di servirsi del calcolo in forma assiomatica nella rappresentazione delle argomentazioni sintattiche mediante la tecnica dell’aritmetizzazione.

Infine lo studente saprà cogliere l’importanza dei teoremi di Gödel per la teoria della conoscenza e avrà la capacità di integrare e comunicare le competenze acquisite sia nel settore matematico-fondazionale sia in contesti interdisciplinari.

***PROGRAMMA DEL CORSO***

1. *La filosofia della matematica nel pensiero antico, medievale e moderno: lineamenti e sviluppi*

2. *La crisi dell'evidenza matematica e le geometrie non euclidee*

3. *Il problema dei fondamenti della matematica nel pensiero contemporaneo*

a) L’idea di dimostrazione, il metodo assiomatico e la sua evoluzione

b) La “crisi dei fondamenti” e il problema della non contraddittorietà delle teorie matematiche

c) Antinomie sintattiche e antinomie semantiche

d) L’assiomatizzazione di Zermelo della teoria degli insiemi e i sistemi assiomatici ZF e VNB

e) Costruttivismo, intuizionismo, platonismo. La posizione predicativista e il concettualismo

f) Il “programma hilbertiano”

4. *I teoremi di incompletezza e il superamento di una concezione puramente formalistica della matematica*

a) Le teorie formali

b) Elementi di calcolo dei predicati del primo ordine con identità

c) Costruzione del calcolo logico in forma assiomatica

d) Il sistema semantico ARP

e) Il sistema PRA

f) Rappresentazione in PRA della sintassi di una teoria formale e condizioni di derivabilità

g) Lemma di diagonalizzazione

h) Il primo teorema di Gödel

i) Incompletezza semantica, alle condizioni del primo teorema di Gödel, di ogni teoria

l) Il secondo teorema di Gödel

m) Formalizzazione del secondo teorema di Gödel in PRA

n) Principi di riflessione e teorema di Löb

o) Conseguenze dei teoremi di Gödel

p) Il significato dei teoremi di incompletezza nella teoria della conoscenza

5. *Linee essenziali e orientamenti delle ricerche sui fondamenti della matematica nel periodo successivo alla formulazione dei teoremi di Gödel*

a) I contributi delle principali scuole fondazionali

b) Reazioni al fondazionalismo: l'empirismo in matematica ed altre prospettive non fondazionali.

I limiti delle posizioni che escludono il problema dei fondamenti

6*. Gli esiti dell'indagine sui fondamenti della matematica e l'assiomatizzazione della matematica in* *senso stretto (*mathematics proper*) secondo Gödel*

7*. Applicazioni del metodo assiomatico alla fisica: il problema fondazionale della scelta di nuovi assiomi per l'eliminazione delle contraddizioni che emergono nelle teorie fisiche.*

***BIBLIOGRAFIA***

m. Borga, d. Palladino, *Oltre il mito della crisi. Fondamenti e filosofia della matematica nel XX secolo*, La Scuola, Brescia 1997.

E. Agazzi, D. Palladino, *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria dal punto di vista elementare,* La Scuola, Brescia 1998.

S. Galvan, *Introduzione ai teoremi di Incompletezza*,F. Angeli, Milano 1992.

K. Gödel, *Opere*, vol. III: *Saggi inediti e conferenze*, a cura di S. Feferman, J.W. Dawson Jr., W. Goldfarb, C. Parsons e R.M. Solovay, ed.it. a cura di E. Ballo, G. Lolli, C. Mangione e P. Pagli, Bollati Boringhieri, Torino 2006.

H. Wang, *Dalla matematica alla filosofia*, Bollati Boringhieri, Torino 1984.

Ulteriori indicazioni bibliografiche saranno comunicate durante il corso.

***DIDATTICA DEL CORSO***

Lezioni in aula.

***METODO E CRITERI DI VALUTAZIONE***

Metodo di valutazione

Per l’accertamento delle conoscenze, competenze e abilità dello studente è previsto un esame orale.

Ai fini della valutazione concorreranno i seguenti riscontri: *a*) verifica delle conoscenze acquisite mediante tre o più domande di uguale peso, atte a dimostrare l’estensione e la profondità della preparazione; *b*) verifica delle competenze specifiche e delle abilità evidenziate da un uso corretto ed efficace del linguaggio formale.

Criteri di valutazione

Verranno valutati in generale la pertinenza delle risposte, la capacità di individuare nessi concettuali e l’uso appropriato della terminologia tecnica specifica. Riguardo ai contenuti delle risposte e all’esposizione, si applicheranno i seguenti criteri: *a*) verifica della capacità di analizzare, nei loro molteplici aspetti, il significato, l’evoluzione, gli esiti e le implicazioni del problema dei fondamenti della matematica; *b*) accertamento della corretta utilizzazione di un linguaggio formale nelle argomentazioni metateoriche; verifica della conoscenza delle procedure dimostrative e della capacità di esporle con rigore e linearità.

***AVVERTENZE E PREREQUISITI***

Prerequisiti

Per una proficua frequenza del corsoe per il superamento del relativo esame si richiedonoallo studente conoscenze di teoria degli insiemi e, in generale, dei principali contenuti della matematica di base.

Avvertenze

Il Prof. Antonino Ventura riceve gli studentidopo le lezioni.