# Geometria II

## Prof. Mauro Spera

***OBIETTIVO DEL CORSO E RISULTATI DI APPRENDIMENTO ATTESI***

Il corso si prefigge lo scopo di introdurre ed elaborare i concetti fondamentali della geometria differenziale delle curve e delle superficie, in modo rigoroso ma nello stesso tempo concreto e basato su esempi, allo scopo di sviluppare ulteriormente negli allievi l'intuizione geometrica, la capacità di astrazione e l'abilità di calcolo analitico, anche in vista delle applicazioni nei corsi paralleli e successivi.

***PROGRAMMA DEL CORSO***

*1. Geometria differenziale delle curve nel piano e nello spazio*

Curve parametriche regolari. Lunghezza d'arco. Curve piane: lunghezza d'arco in coordinate polari.

Curve piane: curvatura (con segno), raggio di curvatura e cerchio osculatore e sua caratterizzazione come limite dei cerchi tangenti alla curva in un punto e passanti per un altro punto della curva. Formula generale per la curvatura, formalismo complesso e formalismo "misto". Ricostruzione di una curva piana a partire dalla sua curvatura a meno di un movimento rigido (teorema fondamentale per le curve piane), formula esplicita.

Esempi: rette, coniche e altre curve classiche (cicloide, trattrice, clotoide ecc.). Evoluta ed evolvente. L'evoluta di una trattrice è una catenaria. L'evoluta di una cicloide è una cicloide.

Curve spaziali: curvatura, biregolarità , triedro principale,

torsione, formule di Frénet-Sérret.

Teorema fondamentale (curvatura e torsione caratterizzano una curva

biregolare a meno di uno spostamento rigido), con idea della dimostrazione.

Formule generali per la curvatura e la torsione.

Studio locale di una curva (biregolare) tramite il triedro di Frénet.

Teoria del Dini.

Sfera osculatrice e teorema di de Saint Venant.

Esempi: cubica gobba, eliche, finestra di Viviani...

*2. Geometria differenziale delle superficie*

Richiami di calcolo vettoriale.

Superficie parametriche regolari. Prima forma fondamentale (metrica).

Carta di Mercator. Proiezione stereografica (e proprietà di quest'ultima di inviare cerchi in cerchi). Metrica sulle superficie di rivoluzione;

la pseudosfera di Beltrami.

L'applicazione di Gauss e relativo operatore di forma.

Seconda forma fondamentale e sue interpretazioni geometriche (teorema di Meusnier; scostamento dal piano tangente)

curvature principali, linee asintotiche, linee di curvatura e teorema di

Rodrigues. Teorema di Eulero. Indicatrice di Dupin.

Curvatura gaussiana e curvatura media e loro formule di calcolo. La seconda forma fondamentale per le superficie di rivoluzione. Curvature principali e loro significato geometrico (curvatura del meridiano e reciproco della grannormale).

Curvatura della pseudosfera. Esempi vari (elicoide, catenoide...).

Formule di Weingarten. Il Theorema Egregium e di Codazzi-Mainardi (schema generale della dimostrazione). Formule varie per la curvatura. Derivata covariante e sua interpretazione geometrica (Levi-Civita). Simboli di Christoffel.

Dimostrazione del Theorema Egregium.

Teorema fondamentale della teoria delle superficie (cenno).

Trasporto parallelo e suo significato geometrico. Formula di Levi-Civita. Trasporto parallelo sulla sfera.

[Prologo: richiami di meccanica analitica. Principio di azione stazionaria ed equazioni di Lagrange, coordinate cicliche e relative grandezze conservate (integrali primi)].

Geodetiche e loro proprietà intrinseche ed estrinseche:

curve autoparallele, cammini critici dei funzionali energia e lunghezza

(se si usa l'ascissa curvilinea, in quest'ultimo caso), curve di curvatura geodetica nulla (def. di curvatura geodetica e suo significato geometrico, con dim.). Deteminazione delle geodetiche in alcuni esempi: piano euclideo,

sfera, piano iperbolico, superficie di rivoluzione (teorema di Clairaut).

Formula di Gauss per i triangoli geodetici. Applicazione alle geometrie non euclidee: sfera, piano proiettivo (ellittico), piano iperbolico.

Teorema di Gauss-Bonnet.

Cenni su: applicazione esponenziale, coordinate normali e polari,cerchi geodetici, lemma di Gauss e caratterizzazioni intrinseche della curvatura (formula di Bertrand e Puiseux), teorema di Minding.

Esempi, esercizi e complementi vari, tecniche di calcolo:

quadriche, superficie sviluppabili, rigate, superficie minime e loro caratterizzazione variazionale (elicoide, catenoide...).

Gli argomenti si intendono corredati delle relative dimostrazioni

(o idee di queste), salvo avviso contrario.

***BIBLIOGRAFIA***

M. Abate - F. Tovena, *Curve e superfici,* Springer, Milano, 2006.

M. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces,* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

A. Gray - E. Abbena - S. Salamon, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica,* CRC Press, Boca Raton, 2006.

D. Hilbert - S. Cohn-Vossen, *Geometria intuitiva,* Boringhieri, Torino, 1972. [Acquista da V&P](https://librerie.unicatt.it/scheda-libro/david-hilbert-stefan-cohn-vossen/geometria-intuitiva-9788833927459-651617.html)

M. Lipschutz, *Geometria differenziale Schaum,* Etas Libri, 1984.

A. Pressley, *Elementary Differential Geometry,* UTM Springer, New York, 2000.

E. Sernesi, *Geometria 2,* Bollati Boringhieri, Torino, 1994.

M. SPERA, *Elementi di geometria differenziale,* note del corso disponibili in rete.

***METODO E CRITERI DI VALUTAZIONE***

L’insegnamento prevede una prova orale intesa ad accertare il grado di assimilazione dei concetti geometrici e analitici e dei teoremi che li legano relativi all'insegnamento in oggetto tramite esposizione e discussione di alcuni punti del programma, non escludendo richiami a prerequisiti o collegamenti fra parti dello stesso. La valutazione della prova orale terrà conto dell'efficacia, chiarezza e correttezza espositiva, valorizzando l'assimilazione dei concetti e la loro rielaborazione critica da parte del candidato.

***AVVERTENZE E PREREQUISITI***

Si richiedono le nozioni di base del primo anno di una laurea triennale in Matematica. E’ fortemente consigliata la frequenza alle lezioni.

*Orario e luogo di ricevimento degli studenti*

Il Prof. Spera riceve gli studenti nel suo studio nei giorni di lezione e su appuntamento.