# Geometria superiore

## Prof.ssa Silvia Pianta

***OBIETTIVO DEL CORSO E RISULTATI DI APPRENDIMENTO ATTESI***

L’insegnamento si propone di approfondire lo studio dei gruppi di isometrie dei piani metrici classici (euclideo, iperbolico ed ellittico), derivandoli da tre differenti tipi di algebre di quaternioni reali, presentandone le azioni su diversi spazi geometrici e mettendo in evidenza diversi aspetti geometrici dei gruppi stessi, dalla struttura di gruppo d’incidenza e spazio cinematico a quella di gruppo di Lie. Infine per completare il contesto degli spazi quadratici reali di dimensione 4, oltre alle algebre di quaternioni si studierà lo spazio delle matrici hermitiane di ordine 2, atto a rappresentare lo spazio-tempo di Minkowsky , se ne determinerà il gruppo delle isometrie (Gruppo di Poincaré), e in particolare il gruppo di Lorentz ristretto, mostrandone l’isomorfismo col gruppo PSL(2,C).

Al termine dell’insegnamento lo studente dovrebbe essere in grado di

- comprendere I concetti e gli enti introdotti nella teoria, esprimerne correttamente definizioni e proprietà, conoscerne i reciproci legami;

- enunciare rigorosamente i teoremi, saperne individuare la precisa collocazione e le rispettive implicazioni, e di alcuni fornire la dimostrazione;

- acquisire una visione unificante dei gruppi classici presentati nel corso, della loro struttura e delle loro azioni sui diversi spazi geometrici considerati.

***PROGRAMMA DEL CORSO***

*Geometria superiore*

Spazi con parallelismo, Strutture di André e spazi cinematici: proprietà, automorfismi, esempi.

Algebre di quaternioni generalizzati su campi di caratteristica diversa da due. Quaternioni reali: i quaternioni di Hamilton, l’algebra delle matrici Mat(2,R), i quaternioni di Study. Quaternioni complessi: l’algebra delle matrici Mat(2,C).

Gruppi di isometrie dirette dei piani metrici classici come quozienti di gruppi moltiplicativi delle unità delle tre algebre di quaternioni reali e loro struttura di spazio cinematico.

PSL(2,C), PSL(2,R), PGL(2,R), SU(2), SO(3), U(1) considerati nelle loro diverse azioni.

***BIBLIOGRAFIA***

Prima parte: Strutture di traslazione e spazi cinematici:

F. Buekenhout: *Handbook of incidence geometry*. Elsevier Science B.V., Amsterdam (1995).

S. Pasotti: *Partizioni di gruppi e strutture geometriche*. Tesi di Laurea, Università Cattolica del Sacro Cuore, a.a. 2000/2001 (e la bibliografia!).

G. Zappa: Partizioni ed S-partizioni di gruppi finiti. *Symposia Mathematica* **1** (1969), 85-94.

Seconda parte: Algebre e quaternioni

M. Comoglio: H come Hamilton! Parliamo di quaternioni. <http://matematica.unibocconi.it/articoli/h-come-hamilton-parliamo-di-quaternioni> (2010).

H. Conway, D. A. Smith: *On Quaternions and Octonions: their geometry, arithmetic and symmetry*. A. K. Peters, Natick, Massachusetts (2003).

H. D. Ebbinghaus, et al.: *Numbers*. Reading in Mathematics **123**, Springer, New York (1991).

T.Y. Lam: *Introduction to quadratic forms over fields*. A.M.S. Graduate Studies in Mathematics, vol. **67**,Providence,Rhode Island (2004).

D. W. Lewis: Quaternion algebras and the algebraic legacy of Hamilton’s quaternions. *Irish Math. Soc. Bullettin* **57** (2006), 41-64 (e la bibliografia di questo articolo!).

M. Nacinovich: *Geometria 3*. Sansoni editore, Firenze (1986).

O. T. O’Meara: *Introduction to quadratic forms*. Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1973).

F. R. Pfaff: A commutative multiplication of number triplets. *The American Mathematical Monthly*, Vol. **107**, No. 2 (2000), 156-162.

Terza parte: Spazio-tempo di Minkowski e gruppo di Lorentz:

W. Benz: *Classical geometries in modern contexts. Geometry of real inner product spaces.* Springer, Basel (2012).

H. Karzel, A. Konrad: *Raum-Zeit-Welt und hyperbolische Geometrie*. Technische Universität München (1994).

A. Maggi: Linearità delle trasformazioni di Lorentz. <http://www.albestar.it/dida/Linearity.pdf> (2005).

Verranno inoltre fornite delle dispense scritte dalla docente del corso.

***DIDATTICA DEL CORSO***

Lezioni ed esercitazioni in aula.

***METODO E CRITERI DI VALUTAZIONE***

L'insegnamento prevede una prova orale che intende accertare il grado di assimilazione dei concetti, dei risultati e delle procedure illustrate nell'insegnamento  tramite esposizione e discussione di alcuni punti del programma e dei collegamenti fra parti dello stesso.

La valutazione della prova terrà conto della correttezza delle procedure illustrate, del loro rigore logico e metodologico, e della efficacia e correttezza espositiva, valorizzando l'assimilazione dei concetti, la loro rielaborazione personale e la capacità di sintesi da parte del candidato.

***AVVERTENZE E PREREQUISITI***

Le conoscenze di base richieste per seguire questo corso sono quelle contenute nei corsi obbligatori di Geometria, Algebra e Analisi della Laurea triennale in Matematica. Si richiede sempre la massima attenzione al linguaggio e al significato dei simboli che verranno via via introdotti, nonché al rigore logico della trattazione e all’importanza dei collegamenti tra gli enti introdotti.

Covid-19

Nel caso in cui la situazione sanitaria relativa alla pandemia di Covid-19 non dovesse consentire la didattica in presenza, sarà garantita l’erogazione a distanza dell’insegnamento con modalità che verranno comunicate in tempo utile agli studenti.

***Orario e luogo di ricevimento degli studenti***

La Prof.ssa Silvia Pianta riceve gli studenti nel suo studio, dopo le lezioni e in qualunque altro orario previo appuntamento per e-mail.