# . – Geometria II

## Prof. Mauro Spera

***OBIETTIVO DEL CORSO E RISULTATI DI APPRENDIMENTO ATTESI***

Il corso si prefigge lo scopo di introdurre ed elaborare i concetti fondamentali della geometria differenziale delle curve e delle superficie, in modo rigoroso ma nello stesso tempo concreto e basato su esempi, allo scopo di sviluppare ulteriormente negli allievi l'intuizione geometrica, la capacità di astrazione e l'abilità di calcolo analitico, anche in vista delle applicazioni nei corsi paralleli e successivi.

***PROGRAMMA DEL CORSO***

1- Geometria differenziale delle curve nel piano e nello spazio

Curve parametriche regolari. Lunghezza d'arco. Curve piane: lunghezza d'arco in coordinate polari.

Curve piane: curvatura (con segno), raggio di curvatura e cerchio osculatore e sua caratterizzazione come limite dei cerchi tangenti alla curva in un punto e passanti per un altro punto della curva. Formula generale per la curvatura, formalismo complesso e formalismo "misto". Ricostruzione di una curva piana a partire dalla sua curvatura a meno di un movimento rigido (teorema fondamentale per le curve piane), formula esplicita.

Esempi: rette, coniche e altre curve classiche (cicloide, trattrice, clotoide ecc.). Evoluta ed evolvente. L'evoluta di una trattrice e' una catenaria. L'evoluta di una cicloide e' una cicloide.

Curve spaziali: curvatura, biregolarità , triedro principale,

torsione, formule di Frénet-Sérret.

Teorema fondamentale (curvatura e torsione caratterizzano una curva

biregolare a meno di uno spostamento rigido), con idea della dimostrazione.

Formule generali per la curvatura e la torsione.

Studio locale di una curva (biregolare) tramite il triedro di Frénet.

Teoria del Dini.

Sfera osculatrice e teorema di de Saint Venant.

Esempi: cubica gobba, eliche, finestra di Viviani...

3. Geometria differenziale delle superficie

Richiami di calcolo vettoriale.

Superficie parametriche regolari. Prima forma fondamentale (metrica).

Carta di Mercator. Proiezione stereografica (e proprietà di quest'ultima di inviare cerchi in cerchi). Metrica sulle superficie di rivoluzione;

la pseudosfera di Beltrami.

L'applicazione di Gauss e relativo operatore di forma.

Seconda forma fondamentale e sue interpretazioni geometriche (teorema di Meusnier; scostamento dal piano tangente)

curvature principali, linee asintotiche, linee di curvatura e teorema di

Rodrigues. Teorema di Eulero. Indicatrice di Dupin.

Curvatura gaussiana e curvatura media e loro formule di calcolo. La seconda forma fondamentale per le superficie di rivoluzione. Curvature principali e loro significato geometrico (curvatura del meridiano e reciproco della grannormale).

Curvatura della pseudosfera. Esempi vari (elicoide, catenoide...).

Formule di Weingarten. Il Theorema Egregium e di Codazzi-Mainardi (schema generale della dimostrazione). Formule varie per la curvatura. Derivata covariante e sua interpretazione geometrica (Levi-Civita). Simboli di Christoffel.

Dimostrazione del Theorema Egregium.

Teorema fondamentale della teoria delle superficie (cenno).

Trasporto parallelo e suo significato geometrico. Formula di Levi-Civita. Trasporto parallelo sulla sfera.

[Prologo: richiami di meccanica analitica. Principio di azione stazionaria ed equazioni di Lagrange, coordinate cicliche e relative grandezze conservate (integrali primi)].

Geodetiche e loro proprietà intrinseche ed estrinseche:

curve autoparallele, cammini critici dei funzionali energia e lunghezza

(se si usa l'ascissa curvilinea, in quest'ultimo caso), curve di curvatura geodetica nulla (def. di curvatura geodetica e suo significato geometrico, con dim.). Deteminazione delle geodetiche in alcuni esempi: piano euclideo,

sfera, piano iperbolico, superficie di rivoluzione (teorema di Clairaut).

Formula di Gauss per i triangoli geodetici. Applicazione alle geometrie non euclidee: sfera, piano proiettivo (ellittico), piano iperbolico.

Teorema di Gauss-Bonnet.

Cenni su: applicazione esponenziale, coordinate normali e polari,

cerchi geodetici, lemma di Gauss e caratterizzazioni intrinseche della curvatura (formula di Bertrand e Puiseux), teorema di Minding.

Esempi, esercizi e complementi vari, tecniche di calcolo:

quadriche, superficie sviluppabili, rigate, superficie minime e loro caratterizzazione variazionale (elicoide, catenoide...).

Gli argomenti si intendono corredati delle relative dimostrazioni

(o idee di queste), salvo avviso contrario.

***BIBLIOGRAFIA[[1]](#footnote-1)***

M. Abate - F. Tovena, *Curve e superfici,* Springer, Milano, 2006.

M. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces,* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

A. Gray - E. Abbena - S. Salamon, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica,* CRC Press, Boca Raton, 2006.

D. Hilbert - S. Cohn-Vossen, *Geometria intuitiva,* Boringhieri, Torino, 1972.

M. Lipschutz, *Geometria differenziale Schaum,* Etas Libri, 1984.

A. Pressley, *Elementary Differential Geometry,* UTM Springer, New York, 2000.

E. Sernesi, *Geometria 2,* Bollati Boringhieri, Torino, 1994. [Acquista da V&P](https://librerie.unicatt.it/scheda-libro/edoardo-sernesi/geometria-9788833932323-660143.html)

M. SPERA, *Elementi di geometria differenziale,* note del corso disponibili in rete.

***METODO E CRITERI DI VALUTAZIONE***

L’insegnamento prevede una prova scritta preliminare e una orale. La prova scritta consisterà di esercizi nei quali il candidato dovrà mostrare di aver acquisito le competenze relative alla Geometria Differenziale di base e di saperle applicare a situazioni specifiche simili o affini a quelle illustrate nelle ore di didattica integrativa. La valutazione della prova scritta terrà conto della correttezza dei risultati e delle procedure utilizzate per ottenerli, nonché della qualità della presentazione delle stesse. La prova orale intende accertare il grado di assimilazione dei concetti geometrici e analitici e dei teoremi che li legano relativi all'insegnamento in oggetto tramite esposizione e discussione di alcuni punti del programma, non escludendo richiami a prerequisiti o collegamenti fra parti dello stesso. La valutazione della prova orale terrà conto dell'efficacia, chiarezza e correttezza espositiva, valorizzando l'assimilazione dei concetti e la loro rielaborazione critica da parte del candidato.

***AVVERTENZE E PREREQUISITI***

Si richiedono le nozioni di base del primo anno di una laurea triennale in Matematica. E’ fortemente consigliata la frequenza alle lezioni.

Covid-19

Nel caso in cui la situazione sanitaria relativa alla pandemia di Covid-19 non dovesse consentire la didattica in presenza, sarà garantita l’erogazione a distanza dell’insegnamento con modalità che verranno comunicate in tempo utile agli studenti.

***Orario e luogo di ricevimento degli studenti***

Il Prof. Spera riceve gli studenti nel suo studio (Via Musei, terzo piano) nei giorni di lezione e su appuntamento.

1. I testi indicati nella bibliografia sono acquistabili presso le librerie di Ateneo; è possibile acquistarli anche presso altri rivenditori. [↑](#footnote-ref-1)