Matrici, vettori e sistemi lineari

In questo capitolo impareremo a trattare i sistemi lineari, cioè i sistemi di equazioni di primo grado, con uno strumento nuovo: quello delle matrici. Introdurremo dei concetti che ci permetteranno, in modo abbastanza semplice, di capire velocemente se un sistema lineare ammette soluzioni e *quante* ne ammette, ed eventualmente anche calcolare *quali* sono. Vedremo poi come lo stesso strumento si applica anche alla trattazione delle trasformazioni lineari studiate nel capitolo precedente.

La teoria delle matrici generalizza la teoria dei numeri: per esse è possibile definire la somma, il prodotto, e in alcuni casi anche il quoziente (se la matrice è invertibile). Tale teoria è piuttosto recente, e si è affermata gradualmente nella storia della matematica. Anche se alcune tecniche erano usate già nel Medioevo, è stato soltanto nel XIX secolo che ci si è resi conto della potenza e dell'universalità di questo strumento.

1 Matrici

Come sempre quando si impara un linguaggio nuovo, anche nel caso delle matrici dovremo cominciare dando parecchie definizioni e proprietà, e impiegheremo un po' di tempo ad impratichirci con lo strumento prima di poterlo padroneggiare appieno. In questa Sezione cercheremo di abituarci a lavorare con le matrici, apprendendone le prorpietà e le particolarità, senza preoccuparci delle applicazioni. Nelle sezioni successive invece useremo questo strumento per risolvere alcuni problemi più concreti.

Cominciamo subito con una definizione:

Definizione 1 *Una* **matrice** *è una tabella rettangolare di numeri, detti* **elementi della matrice***. Si dice* **matrice di tipo** (n, k) *una tabella che ha n righe e k colonne, e che quindi contiene $n \cdot k$ elementi.*

Le matrici con una sola riga, cioè di tipo $(1, k)$, sono dette **matrici-riga***, mentre quelle con una sola colonna, cioè di tipo $(n, 1)$, vengono chiamate* **matrici-colonna***. Le matrici-riga e le matrici-colonna vengono anche chiamate* **vettori***.*

A volte si usa scrivere "matrice $n \times k$" al posto di "matrice di tipo (n, k)".

Solitamente le matrici vengono indicate con lettere maiuscole, e i loro elementi con le corrispondenti lettere minuscole. Ad esempio, se denotiamo con A la matrice di tipo $(2, 3)$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1/2 \\ -1 & 3/4 & 0 \end{bmatrix}$$

denoteremo con a_{11} l'elemento della prima riga, prima colonna (in questo caso 2), con a_{13} l'elemento della prima riga, terza colonna (in questo caso $-1/2$), con a_{21} l'elemento della seconda riga, prima colonna (in questo caso -1), ecc. ecc. Sinteticamente questa notazione viene scritta anche come

$$A = \left[a_{ij}\right].$$

Inoltre si usa racchiudere la tabella tra parentesi quadrate, come abbiamo fatto noi, oppure tra parentesi rotonde:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1/2 \\ -1 & 3/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le due notazioni sono equivalenti, e in questo capitolo useremo la prima delle due.

Le matrici di tipo $(1,1)$, che contengono soltanto un numero, possono essere identificate con il numero stesso. Quindi, in un certo senso, l'insieme delle matrici è un oggetto *più generale* dei numeri reali.

Nell'ambito delle matrici, un ruolo molto importante è giocato dalle matrici "quadrate":

Definizione 2 *Le matrici di tipo (n,n) vengono dette* **matrici quadrate di ordine** *n.*

Si chiama **diagonale principale** *di una matrice quadrata l'insieme degli elementi a_{ii} che hanno il numero della riga uguale a quello della colonna. Si chiama* **matrice diagonale** *ogni matrice quadrata i cui elementi fuori dalla diagonale principale siano tutti nulli.*

Esempio 1. La matrice quadrata di ordine 3

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

è una matrice diagonale, mentre la matrice

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

non lo è.

Tra le matrici diagonali ha un ruolo molto importante la cosiddetta **matrice identica di ordine** n, che è la matrice quadrata di ordine n che ha tutti 1 sulla diagonale principale e tutti 0 fuori dalla diagonale:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Data una matrice A, denoteremo con A^T la matrice che si ottiene scambiando tra loro le righe e le colonne di A:

$$A = [a_{ij}] \quad \Rightarrow \quad A^T = [a_{ji}] \, .$$

La matrice A^T viene detta **trasposta** della matrice A; se A è di tipo (n, k), allora A^T è di tipo (k, n).

Esempio 2. La trasposta della matrice-riga

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

è la matrice-colonna

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} .$$

Naturalmente la trasposta di una matrice quadrata di ordine n è ancora una matrice quadrata di ordine n. Se poi capita che

$$A^T = A,$$

cioè che una matrice quadrata coincida con la sua trasposta, allora la matrice A si dirà **simmetrica**. Se invece capita che

$$A^T = -A,$$

cioè che trasponendo una matrice quadrata tutti i suoi elementi cambino di segno, allora la matrice A si dirà **antisimmetrica**.

Esempio 3. Le matrici simmetriche di ordine 2 sono della forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} ,$$

mentre quelle antisimmetriche di ordine 2 sono della forma

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} .$$

Si noti che le matrici antisimmetriche, di qualsiasi ordine, hanno tutti elementi nulli sulla diagonale principale.

1.1 Somma di matrici, prodotto per uno scalare

Due matrici dello stesso tipo possono essere sommate (o anche sottratte) in un modo molto semplice, operando sugli elementi corrispondenti. Se abbiamo due matrici di tipo (n, k)

$$A = [a_{ij}] \, , \qquad B = [b_{ij}] \, ,$$

porremo

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}] \, , \qquad A - B = [a_{ij} - b_{ij}] \, .$$

Esempio 4. Date le matrici quadrate di ordine 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

avremo, ragionando elemento per elemento, che

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2 & 1+5 \\ -1+3 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Allo stesso modo,

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2 & 1-5 \\ -1-3 & 0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Un'altra operazione molto semplice che si può effettuare su una matrice è quella di moltiplicare tutti i suoi elementi per uno stesso numero. Tale operazione prende il nome di **prodotto per uno scalare**: dato un numero t e una matrice A di tipo (n, k), si definisce la matrice tA, sempre dello stesso tipo, ponendo

$$tA = [t\, a_{ij}].$$

Esempio 5. Data la matrice quadrata di ordine 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},$$

si ha

$$2A = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 6 \\ 2 \cdot (-1) & 2 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Allo stesso modo, si può verificare che

$$\frac{1}{2}A = \begin{bmatrix} 1/2 & 3 \\ -1/2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad -A = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

In particolare, se si moltiplica una matrice di tipo (n, k) per 0 si ottiene la **matrice nulla di tipo** (n, k), che ha ogni elemento uguale a 0.

Le operazioni che coinvolgono soltanto somma e prodotto per uno scalare si dicono **combinazioni lineari**. Quindi, per quanto appena visto, sulle matrici *dello stesso tipo* possono essere effettuate tutte le combinazioni lineari.

Esempio 6. Date le matrici di tipo $(2, 3)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

si possono costruire le matrici, tutte di tipo $(2, 3)$,

$$2A - 3B, \quad -\frac{1}{2}A + A + B - \frac{2}{5}B, \quad \frac{13}{27}B - 7A, \quad \pi A - 12B, \quad \dots$$

Per esempio si ha

$$\begin{aligned} 2A - 3B &= 2\begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -3 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 14 & 4 \\ -1 & -4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & -3 & 1 \\ -6 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 11 & 5 \\ -7 & -10 & 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Si provi per esercizio a scrivere gli elementi delle altre matrici.

1.2 Prodotto di matrici

Un'operazione ben più sofisticata, ma che ha anche un significato geometrico importante e che vedremo più avanti, è il cosiddetto **prodotto (righe per colonne) tra due matrici**. Questa operazione prende due matrici e ha per risultato ancora una matrice, e si può effettuare solo quando le due matrici di partenza sono tali per cui il numero di colonne della prima coincide col numero di righe della seconda. Quindi le matrici non devono essere dello stesso tipo: solo nel caso delle matrici quadrate il prodotto si può fare quando le matrici hanno lo stesso ordine.

In formule, il prodotto di due matrici A e B è definito quando A è di tipo (n, k) e B di tipo (k, p); la matrice-prodotto sarà di tipo (n, p), cioè avrà tante righe quante la prima matrice e tante colonne quante la seconda. Già da queste premesse capiamo che il prodotto di matrici *non è commutativo*, e questo è un fatto da tener ben presente.

Ma veniamo finalmente alla definizione di questo prodotto. Cominciamo considerando il caso particolare di una matrice-riga A e una matrice-colonna B:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k}, \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{k1} \end{bmatrix}$$

dove notiamo che il numero di colonne della prima matrice è k ed è uguale al numero di righe della seconda. Allora il prodotto AB ha come risultato una matrice di tipo $(1, 1)$, cioè un semplice numero. Tale numero si ottiene in questo modo: si prende il primo elemento della matrice A e lo si moltiplica per il primo elemento di B, poi gli si somma il secondo di A per il secondo di B, e così via fino a sommare l'ultimo elemento di A per l'ultimo di B. Chiamando C la matrice prodotto AB, ovvero $C = AB$, si ha che la matrice C è di tipo $(1, 1)$ e l'unico elemento di C è dato da

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1k}b_{k1}.$$

Ora veniamo al caso generale in cui A è di tipo (n, k) e B di tipo (k, p). In questo caso la matrice risultante C è di tipo (n, p) e il suo generico elemento c_{ij} si trova in questo modo:

- si prende la riga numero i della matrice A, ottenendo una matrice-riga che chiameremo A_i;
- si prende la colonna numero j della matrice B, ottenendo una matrice-colonna che chiameremo B_j;
- si effettua il prodotto visto sopra tra la matrice-riga A_i e la matrice-colonna B_j: il numero ottenuto sarà il valore di c_{ij}.

Si noti che la matrice-riga A_i e la matrice-colonna B_j hanno esattamente k elementi, quindi si può effettuare l'operazione vista sopra. Naturalmente, questa procedura va ripetuta per tutti gli elementi della matrice C, che sono $n \cdot p$, quindi il prodotto di matrici è un'operazione abbastanza lunga e laboriosa, anche se basata su semplici addizioni e moltiplicazioni.

L'espressione in formule del prodotto righe per colonne è la seguente:

$$C = AB, \quad c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj},$$

e volendo usare il simbolo sintetico di sommatoria, che sarà meglio discusso e studiato nel Capitolo 10, si può scrivere

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} b_{sj}.$$

Esempio 7. Facciamo un esempio con le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 0. \end{bmatrix}$$

La matrice A è di tipo $(2,3)$ e la matrice B di tipo $(3,2)$, quindi il prodotto $C = AB$ è possibile ed è una matrice di tipo $(2,2)$, ovvero una matrice quadrata di ordine 2. Per calcolare c_{11} consideriamo le matrici

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ed effettuiamo il prodotto elemento per elemento, sommando i risultati:

$$c_{11} = 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 9 - 2 + 4 = 11.$$

Allo stesso modo, per calcolare c_{12} consideriamo le matrici

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ed effettuiamo il prodotto elemento per elemento:

$$c_{12} = 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 0 = -3 - 2 = -5.$$

Continuiamo con gli altri due elementi di C: per calcolare c_{21} consideriamo le matrici

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e calcoliamo il prodotto:

$$c_{21} = (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = -3 + 2 + 8 = 7,$$

e per calcolare c_{22} consideriamo le matrici

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ottenendo

$$c_{22} = (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 1 + 2 = 3.$$

Quindi la matrice del prodotto di A e B è data da

$$C = AB = \begin{bmatrix} 11 & -5 \\ 7 & 3. \end{bmatrix}$$

Per calcolare il prodotto di due matrici non è necessario ogni volta scrivere a parte le matrici riga e colonna corrispondenti all'elemento da calcolare; di solito ci si prepara una matrice vuota con lo spazio per i risultati, e mentalmente si isolano la riga e la colonna "giuste" da moltiplicare volta per volta. In figura è indicato il procedimento (mentale, più che grafico) per calcolare l'elemento di posto $1,1$ dell'Esempio precedente: si considerano la prima riga di A e la prima colonna di B, si esegue il loro prodotto e si scrive il risultato al posto giusto nella matrice vuota appositamente preparata.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{11} & \\ & \end{bmatrix}$$

Nella figura seguente, lo stesso procedimento è indicato per l'elemento di posto $1,2$. Continuando così si completa il calcolo di tutti gli elementi della matrice prodotto.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & \boxed{-5} \\ & \end{bmatrix}$$

Osservazione 1. Si può verificare che il prodotto di matrici gode della **proprietà associativa**, ovvero

$$(AB)C = A(BC)$$

ogniqualvolta A, B, C siano tre matrici che possono essere moltiplicate.

Invece il prodotto di matrici, come abbiamo già detto, non gode della **proprietà commutativa**, e questo è forse uno dei primi casi in cui incontriamo un'operazione che non gode di questa proprietà. Anche nel caso in cui A, B siano matrici quadrate dello stesso ordine, e dunque abbia senso sia il prodotto AB che il prodotto BA, in generale i due prodotti possono essere diversi:

$$AB \neq BA$$

e anzi questo è il caso più frequente. Se invece capita che $AB = BA$, si dice allora che le matrici **commutano**.

Provate per esercizio a verificare che le matrici

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

non commutano, mentre le matrici

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

commutano.

1.3 Il determinante

Una delle nozioni più importanti (forse proprio la più importante!) riguardo alle matrici è quella di **determinante**. Il determinante è un numero associato a una *matrice quadrata*, che viene calcolato con un procedimento piuttosto complicato ma che ha un significato ben preciso. Come per il prodotto di matrici, scopriremo alcune delle tante applicazioni del determinante più avanti in questo capitolo; per ora accontentiamoci di imparare a calcolarlo, almeno nei casi più semplici. Di solito il determinante di una matrice A viene indicato con $\det A$, o anche con gli elementi della matrice scritti tra barre verticali: ad esempio, se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, si usa scrivere

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Matrici di ordine 1

Per le matrici quadrate di ordine 1, che contengono soltanto un elemento, il calcolo del determinante è uno scherzo: è il valore dell'elemento stesso. Quindi non abbiamo bisogno di soffermarci su questo punto.

Matrici di ordine 2

Nel caso di matrici di ordine 2, il conto è più significativo: data una matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

si definisce il **determinante** di A come

$$\det A = ad - bc.$$

Si noti che si calcola il prodotto degli elementi della diagonale principale (ad) e si sottrae il prodotto degli elementi dell'altra diagonale (bc).

Esempio 8. Si ha

$$\det \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = (-1) \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot (-4) = -3 + 2 = -1.$$

Anche qui possiamo evitare di soffermarci troppo su questa formula; in questo caso è un buon esercizio, però, verificare che

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B,$$

ovvero che il determinante del prodotto di matrici è il prodotto dei determinanti. Torneremo più avanti sul significato di questa formula.

Matrici di ordine 3

Ora veniamo alla parte più complicata, quella del calcolo del determinante delle matrici di ordine 3. Ci sono varie tecniche per calcolarlo, noi esporremo la cosiddetta **regola di Sarrus**,[1] che è abbastanza semplice da ricordare. Prendiamo una matrice quadrata di ordine 3

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

e trascriviamo le prime due colonne della matrice alla sua destra:

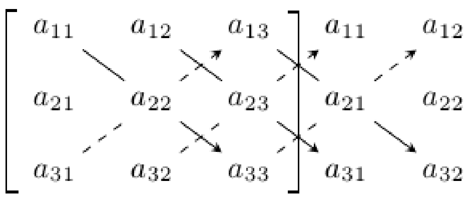
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32}. \end{matrix}$$

Si formeranno così altre due diagonali parallele alla diagonale principale, e altre due diagonali parallele all'altra diagonale. La regola di Sarrus prevede di calcolare il determinante in questo modo:

- si calcolano i prodotti dei tre elementi delle prime tre diagonali (quella principale e le due ad essa parallele);
- si calcolano i prodotti dei tre elementi delle altre tre diagonali e *si cambia il segno di tali prodotti*;
- si sommano (in modo algebrico, cioè tenendo conto del segno) i sei numeri così ottenuti; il risultato è il determinante della matrice.

Attenzione al cambiamento di segno nel secondo passo: è chiaro che se alcuni di tali prodotti erano negativi, diventeranno positivi, e viceversa.

Nella figura, denotiamo con frecce continue le diagonali di cui non va cambiato il segno del prodotto, e con frecce tratteggiate quelle di cui va cambiato il segno.



Esempio 9. Vogliamo calcolare il determinante della matrice quadrata di ordine tre data da

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

[1] Pierre Frédéric Sarrus è stato un matematico francese del XIX secolo.

Usando la regola di Sarrus, trascriviamo a destra le prime due colonne:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4. \end{matrix}$$

I prodotti delle prime tre diagonali sono

$$(-1) \cdot 1 \cdot 2 = -2, \quad 3 \cdot (-2) \cdot 0 = 0, \quad 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24,$$

mentre i prodotti delle altre tre diagonali sono

$$0 \cdot 1 \cdot 3 = 0, \quad 4 \cdot (-2) \cdot (-1) = 8, \quad 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12.$$

Cambiando segno a questi ultimi e sommando tutto si ha

$$-2 + 24 - (8 + 12) = 2$$

quindi il determinante della matrice è 2.

Matrici di ordine 4 e superiore

Il calcolo del determinante di matrici di ordine superiore al terzo può davvero diventare ben complicato e laborioso. Esiste però un modo “induttivo” di calcolare il determinante, che riconduce il calcolo del determinante di una matrice di ordine n al calcolo del determinante di n matrici di ordine $n-1$, e che viene chiamato **sviluppo di Laplace**.[2] Con questo metodo, per calcolare il determinante di una matrice di ordine 4 dovremo calcolare il determinante di quattro matrici di ordine tre. Invece, per calcolare il determinante di una matrice di ordine 5, potremo calcolare il determinante di cinque matrici di ordine quattro (ciascuno dei quali sarà riconducibile a determinanti di ordine tre). Si capisce come il numero di operazioni da fare cresca in maniera vertiginosa. Prendiamo ad esempio una matrice di ordine 6: per calcolarne il determinante, dovremo calcolare 6 determinanti di matrici di ordine 5, per ognuno di questi 5 determinanti di matrici di ordine 4, e per ognuna di queste 4 determinanti di ordine 3. Quindi in tutto dovremo applicare $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ volte la regola di Sarrus!

Ma come funziona lo sviluppo di Laplace? Per semplicità ne vediamo lo schema per una matrice di ordine 4:

- scegliamo una riga o una colonna a piacere della matrice (converrà sceglierne una che contenga degli zeri, se ce ne sono);
- per ogni elemento della riga o colonna scelta, costruiamo una corrispondente matrice di ordine 3 ottenuta rimuovendo la riga e la colonna a cui appartiene l'elemento;
- calcoliamo il determinante di questa matrice di ordine 3 e moltiplichiamolo per l'elemento stesso;
- se l'elemento da cui siamo partiti è tale che sommando il numero di riga e di colonna da lui occupato otteniamo un numero dispari (e diremo che l'elemento occupa **un posto dispari** nella matrice), allora cambiamo segno al prodotto appena calcolato;

[2] Pierre Simon de Laplace è stato un importantissimo e famosissimo matematico, fisico e astronomo francese, vissuto tra la fine dei XVIII e l'inizio del XIX secolo. È stato tra i maggiori sostenitori del *determinismo*.

- infine sommiamo algebricamente tra loro i quattro numeri ottenuti.

L'algoritmo funziona anche per matrici di ordine più alto: in questo caso, naturalmente, ogni volta che rimuoviamo una riga e una colonna otteniamo una matrice di ordine inferiore, il cui determinante andrà calcolato ancora con questo algoritmo.

Esempio 10. Si calcoli il determinante della matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Scegliamo la prima colonna, visto che contiene uno zero, e consideriamo i suoi elementi uno alla volta.

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Il primo elemento è -1, e la matrice di ordine 3 che otteniamo eliminando la sua riga e la sua colonna è

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il determinante di tale matrice vale -22, e moltiplicando questo determinante per l'elemento di partenza, otteniamo $(-1)(-22) = 22$. Inoltre l'elemento non è di posto dispari, perché occupa la prima riga e prima colonna, quindi non dobbiamo cambiare segno al risultato.

Ora procediamo col secondo elemento, che vale 2; togliendo la sua riga e la sua colonna otteniamo la matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

che ha determinante -18. Moltiplicando 2 per -18 otteniamo -36, ma stavolta dobbiamo cambiare segno al prodotto ottenuto perché questo elemento occupa la seconda riga e prima colonna, e quindi è di posto dispari. Quindi alla fine abbiamo ottenuto 36.

Continuiamo col terzo elemento: poiché esso è nullo, qualsiasi sia il risultato del corrispondente determinante di ordine 3, il prodotto sarà comunque nullo, e quindi ci risparmiamo il calcolo di un determinante.

Infine, l'ultimo elemento della prima colonna vale ancora -1, e la matrice che si ottiene rimuovendo la sua riga e la sua colonna è

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

che ha determinante che vale 26. Moltiplicando -1 per 26 e cambiando segno al prodotto, visto che l'elemento è di posto dispari (riga 4, colonna 1) otteniamo ancora 26.

Per finire, sommiamo i quattro numeri ottenuti:

$$22 + 36 + 0 + 26 = 84.$$

Il determinante della matrice di partenza quindi vale 84. ◇

Chiaramente, per il calcolo del determinante con lo sviluppo di Laplace conviene partire da una riga o una colonna che contenga molti zeri: in questo modo infatti ci si risparmia il calcolo di parecchi determinanti delle sotto-matrici (tutti quelli che poi andrebbero moltiplicati per zero).

Il metodo di Laplace, come abbiamo detto, vale per matrici quadrate di ordine qualsiasi, anche 2 o 3. Nel prossimo esempio proviamo a rivedere l'Esempio 9 usando lo sviluppo di Laplace.

Esempio 11. Calcoliamo

$$\det \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

usando lo sviluppo di Laplace.

Scegliamo l'ultima riga, che contiene uno zero (potevamo scegliere anche la prima colonna). Il primo elemento dell'ultima riga è 0, quindi passiamo al secondo, che è 4: è di posto dispari, perché sta nella riga 3 e colonna 2, quindi dovremo cambiare di segno al prodotto. Togliendo l'ultima riga e la seconda colonna otteniamo la sottomatrice

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

che ha determinante $(-1)(-2) - 3 \cdot 2 = -4$. Quindi abbiamo

$$4 \cdot (-4) = -16$$

e dovremo cambiargli di segno.

Ora prendiamo l'ultimo elemento in fondo a destra, che è 2 e non ha posto dispari. Togliendo la terza riga e terza colonna abbiamo la sottomatrice

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha determinante $(-1)1 - 3 \cdot 2 = -7$, e quindi risulta

$$2 \cdot (-7) = -14.$$

Sommando col segno giusto i risultati ottenuti troviamo

$$-(-16) + (-14) = 16 - 14 = 2,$$

che è il determinante della matrice di partenza.

Anche se lo sviluppo di Laplace può risultare un po' macchinoso e contorto, soprattutto all'inizio, bastano pochi esercizi per impratichirsene e diventare anche piuttosto veloci ad applicarlo.

Il complemento algebrico

Consideriamo una matrice quadrata A di ordine n. In un passo dello sviluppo di Laplace bisogna calcolare, dato un elemento a_{ij} della matrice, il determinante della matrice ottenuta togliendo la riga e la colonna di a_{ij} alla matrice di partenza, ed eventualmente cambiare segno se a_{ij} è di posto dispari. Il numero ottenuto con questo conto viene chiamato **complemento algebrico** o anche **cofattore** dell'elemento a_{ij} e si può denotare con c_{ij}.

Quindi lo sviluppo di Laplace si può riassumere in questo modo: scelta la i-esima riga, si ha

$$\det A = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \cdots + a_{in}c_{in},$$

dove c_{ij} è il complemento algebrico di a_{ij}. Allo stesso modo, scelta la j-esima colonna, si ha

$$\det A = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \cdots + a_{nj}c_{nj}.$$

Definizione 3 *Data una matrice quadrata A, la matrice* $\operatorname{cof} A = [c_{ij}]$ *ottenuta mettendo insieme tutti i cofattori degli elementi di A viene chiamata* **matrice dei complementi algebrici** *o* **matrice dei cofattori** *di A.*

Ad esempio, per le matrici quadrate di ordine 2 si ha

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{cof} A = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix},$$

dove facciamo notare il segno meno sugli elementi di posto dispari.

1.4 Proprietà del determinante

Vediamo ora alcune proprietà notevoli del determinante. Ricordiamo che una matrice quadrata si dice **matrice triangolare** se tutti gli elementi sotto la diagonale principale, oppure tutti quelli sopra la diagonale principale, sono nulli. Ad esempio, le matrici

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

sono matrici triangolari.[3]

Si ha allora il seguente teorema:

[3] La nomenclatura è un po' curiosa, poiché risulta che le matrici triangolari sono delle particolari matrici quadrate! Ma di solito non genera confusione.

Teorema 1 *Il determinante di una matrice triangolare è dato dal prodotto degli elementi sulla diagonale.*

Dimostrazione. Supponiamo che tutti gli elementi *sotto* la diagonale principale siano nulli. Allora possiamo scegliere di applicare lo sviluppo di Laplace alla prima colonna della matrice, che è composta da tutti zeri tranne al più il primo elemento. Dobbiamo quindi moltiplicare questo elemento per il determinante della matrice di ordine inferiore che si ottiene togliendo la prima riga e la prima colonna.

A questo punto l'osservazione fondamentale è che tale matrice di ordine inferiore è ancora triangolare. Quindi possiamo procedere applicando di nuovo lo sviluppo di Laplace alla sua prima colonna, e quindi il suo determinante è dato dal primo elemento per il determinante della matrice di ordine inferiore. Procedendo in questo modo arriveremo all'ultimo elemento della diagonale, il cui determinante sarà dato da lui stesso.

Quindi abbiamo trovato che il determinante della matrice di partenza è il prodotto degli elementi sulla diagonale. □

Usando questo teorema è facile calcolare il determinante di una matrice diagonale: esso è il prodotto di tutti gli elementi sulla diagonale principale. Le matrici diagonali, infatti, sono delle particolari matrici triangolari. In particolare il determinante della matrice identica vale 1, qualsiasi sia l'ordine della matrice.

In generale il determinante della somma di due matrici *non è* la somma dei determinanti:

$$\det(A + B) \neq \det A + \det B$$

(per questo si dice che il determinante non è una funzione lineare). Esso però si "comporta bene" con il prodotto di matrici: vale infatti il cosiddetto **teorema di Binet**.[4] La sua formulazione è molto semplice, ma la dimostrazione non è per niente banale e richiede parecchi conti, per cui non la affronteremo.

Teorema 2 (Teorema di Binet) *Date due matrici quadrate A, B dello stesso ordine si ha*

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Il teorema di Binet, quindi, tratta due nozioni piuttosto complicate, il prodotto di matrici e il determinante, legandole in modo mirabile. Una conseguenza immediata del teorema è la seguente: anche se il prodotto di matrici non è in generale commutativo, tuttavia per due matrici quadrate A, B di ordine n si ha

$$\det(BA) = \det B \det A = \det A \det B = \det(AB)$$

e dunque il determinante non cambia invertendo l'ordine del prodotto di matrici.

[4] Jacques Philippe Binet è un matematico e astronomo francese vissuto tra il XVIII e il XIX secolo.

1.5 Matrice inversa

Le matrici quadrate che hanno determinante uguale a zero vengono dette **singolari**, mentre quelle che hanno determinante diverso da zero vengono dette **non singolari**. Quindi, poiché abbiamo visto che il determinante della matrice identica è 1, si ha che la matrice identica non è mai singolare, qualsiasi sia il suo ordine.

Si chiama **inversa** di una matrice quadrata A una matrice, indicata di solito con A^{-1}, tale che

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

dove I è la matrice identica.

Si può dimostrare che la matrice inversa esiste solo quando A è non singolare, cioè quando

$$\det A \neq 0,$$

e in questo caso la matrice inversa è unica. Una matrice non singolare quindi è anche detta **invertibile**, perché esiste la sua inversa. Quindi il calcolo del determinante di una matrice serve anche a sapere se la matrice è invertibile o no.

Inoltre, se abbiamo due matrici quadrate A, B di ordine n, entrambe invertibili, allora anche AB e BA sono invertibili. Dal Teorema di Binet, infatti, se $\det A \neq 0$ e $\det B \neq 0$ segue

$$\det(AB) = \det(BA) = (\det A)(\det B) \neq 0,$$

e dunque anche AB e BA sono non singolari.

Esiste una formula, non molto semplice in verità, per scrivere esplicitamente l'inversa di una matrice: si ha

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{cof} A^T}$$

dove $\operatorname{cof} A$ è la matrice dei cofattori di A (si veda la Definizione 3 a pagina 13). Nel caso facile di matrici di ordine 2 la formula diventa

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che la quantità a denominatore è proprio $\det A$, e quindi l'espressione ha senso se e solo se la matrice non è singolare.

1.6 Il rango

E veniamo finalmente all'ultima definizione di questa sezione, quella di **rango**[5] di una matrice, che vale per una matrice qualsiasi, anche non quadrata. Daremo per il rango di una matrice una definizione operativa.

Consideriamo una matrice A di tipo (n, k); eliminando alcune righe e alcune colonne (anche nessuna) dalla matrice, possiamo ottenere tante matrici quadrate, a seconda di quali e quante righe e colonne abbiamo eliminato. Queste matrici quadrate si chiamano **minori** della matrice A. Di tutti i minori ottenuti, ci interessano quelli non singolari, ovvero che abbiano il determinante diverso da zero.

[5] A volte si usa il termine **caratteristica** con lo stesso significato di rango.

Definizione 4 *Il* **rango** *della matrice A, denotato con $\operatorname{rk} A$, è l'ordine del più grande minore non singolare di A.*

In altre parole, $\operatorname{rk} A$ è l'ordine della matrice quadrata non singolare più grande ottenuta eliminando alcune righe e alcune colonne di A.

Il simbolo rk è l'abbreviazione della parola anglosassone *rank*, che appunto significa "rango". Quindi il rango di una matrice è un numero naturale, compreso tra 0 e il più piccolo tra n e k. In particolare, una matrice quadrata di ordine n non singolare avrà rango n, visto che lei stessa è un minore non singolare e non può contenerne di più grandi.

Il calcolo del rango di una matrice può diventare molto lungo, perché bisogna calcolare un sacco di determinanti, e abbiamo visto che già il calcolo di un determinante è laborioso. Una parziale semplificazione può arrivare dal cosiddetto teorema di Kronecker, che non dimostriamo.

Teorema 3 (Teorema di Kronecker) *Dato un minore non singolare, chiamiamolo C, della matrice di cui si vuole calcolare il rango, la ricerca di minori non singolari di ordine più grande può essere ristretta solamente a quei minori che contengono C.*

Cerchiamo di chiarire il tutto con un esempio.

Esempio 12. Si calcoli il rango della matrice

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Vediamo subito che il rango è almeno 1, poiché la matrice ha degli elementi non nulli (che sono dei minori di ordine 1 non singolari). Scegliendo poi il minore di ordine 2 in alto a sinistra (evidenziato qui sotto)

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -3 & 3 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -4 & 6 \end{matrix} & \begin{matrix} 4 & 2 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

troviamo che il determinante è $-3 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = -3 \neq 0$, quindi il rango della matrice è almeno 2.

Ora, per capire se il rango è 2 oppure 3 (ovviamente non può essere più di 3, visto che la matrice ha 3 righe), per il Teorema di Kronecker è sufficiente guardare i minori che contengono il minore di rango 2 appena evidenziato, e questo risparmia un po' di lavoro: dobbiamo considerare solamente i due minori

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

che hanno entrambi determinante nullo (si provi a verificarlo per esercizio). Quindi la matrice ha rango 2. $\diamond$

2 I sistemi lineari

Si chiamano **sistemi lineari** i sistemi composti da equazioni di primo grado. Essi si possono trattare molto bene col linguaggio delle matrici, e in questa sezione vedremo che vantaggi porta questo nuovo strumento.

Cominciamo subito con un esempio di sistema lineare di due equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ -x - y - 2z = 2. \end{cases}$$

Come possiamo scrivere questo sistema usando le matrici? Procediamo in questo modo: costruiamo una matrice A di tipo $(2, 3)$, cioè con due righe e tre colonne, mettendo nella prima riga i coefficienti delle incognite nella prima equazione, e nella seconda quelli della seconda equazione. Attenzione: dobbiamo rispettare l'ordine delle incognite, quindi se abbiamo usato nella prima equazione l'ordine x, y, z, anche nella seconda dovremo fare altrettanto. Ne risulta la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Notiamo che il numero delle *righe* della matrice corrisponde al numero di equazioni del sistema, mentre il numero delle colonne corrisponde al numero delle incognite. Questa matrice viene anche detta **matrice del sistema**.

Ora introduciamo la **matrice-colonna delle incognite**

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

in cui abbiamo rispettato lo stesso ordine usato per costruire la matrice A. Poiché la matrice A è di tipo $(2, 3)$ e la matrice X è di tipo $(3, 1)$, possiamo calcolare il prodotto di matrici AX, e otteniamo una matrice-colonna di tipo $(2, 1)$ data da

$$AX = \begin{bmatrix} x - 3y + z \\ -x - y - 2z \end{bmatrix}.$$

Questa matrice-colonna rappresenta esattamente il primo membro (la parte a sinistra) delle due equazioni del sistema di partenza. Prendiamo poi i secondi membri del sistema, i cosiddetti **termini noti**, e formiamo un'altra matrice-colonna di tipo $(2, 1)$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Allora possiamo scrivere il sistema lineare nella forma matriciale

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

ovvero, molto sinteticamente,

$$AX = B.$$

Quello che abbiamo fatto in questo caso particolare possiamo ripeterlo per un sistema lineare generale di n equazioni in k incognite. Denotando con $x_1, \dots, x_k$ le incognite, riordinando il sistema otteniamo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1k}x_k = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2k}x_k = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nk}x_k = b_n. \end{cases}$$

Se costruiamo la matrice dei coefficienti

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix},$$

la matrice-colonna delle incognite e la matrice-colonna dei termini noti

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

allora possiamo di nuovo scrivere il sistema nella forma

$$AX = B.$$

Ma qual è l'interesse di riscrivere un sistema lineare in questa forma, a parte la forma più sintetica? Il vantaggio principale è quello di poter usare in questo contesto le proprietà delle matrici e le nozioni introdotte nella sezione precedente. In particolare possiamo enunciare ed usare due teoremi: il Teorema di Rouché-Capelli[(6)] e il Teorema di Cramer[(7)]. Di essi non daremo la dimostrazione perché è un po' troppo tecnica, ma ci forniranno degli ottimi strumenti per trattare i sistemi lineari.

Cominciamo enunciando il Teorema di Rouché-Capelli; per farlo, abbiamo bisogno di introdurre il concetto di **matrice estesa** di un sistema lineare.

[(6)] Eugène Rouché e Alfredo Capelli sono due matematici del XIX secolo, il primo francese e il secondo italiano. Sono morti entrambi nel 1910.

[(7)] Gabriel Cramer è stato un matematico svizzero dell'inizio del XVIII secolo

Definizione 5 *La* **matrice estesa** *del sistema lineare $AX = B$ è la matrice che si ottiene affiancando alla destra della matrice A del sistema la matrice-colonna B dei termini noti. Tali matrici possono essere affiancate perché hanno lo stesso numero di righe, e si ottiene una nuova matrice di tipo $(n, k+1)$, di solito denotata col simbolo $A|B$, data da*

$$A|B = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2k} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & b_n \end{bmatrix}.$$

Ora possiamo enunciare il teorema.

Teorema 4 (Teorema di Rouché-Capelli) *Un sistema lineare di equazione matriciale $AX = B$ ammette soluzione se e solo se*

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A|B,$$

dove rk *denota il rango della matrice. Inoltre, se il sistema è risolubile, le soluzioni possono essere scritte usando $(k - \operatorname{rk} A)$ parametri, dove k è il numero delle incognite.*

In particolare, il sistema ammette una soluzione unica se e solo se

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A|B = k.$$

Quindi per capire se un sistema lineare ammette soluzioni è sufficiente calcolare il rango della matrice A del sistema e della matrice estesa $A|B$.

Osservazione 2. Poiché la matrice estesa “contiene” la matrice A, è sempre vero che

$$\operatorname{rk} A|B \geqslant \operatorname{rk} A.$$

Quindi per capire se un sistema ha soluzione è sufficiente dimostrare la disuguaglianza inversa

$$\operatorname{rk} A|B \leqslant \operatorname{rk} A,$$

cioè bisogna mostrare che il rango della matrice del sistema “non cresce” anche se si aggiunge la colonna dei termini noti.

Il teorema di Rouché-Capelli è più operativo di quello che sembra: se siamo interessati a trovare esplicitamente le soluzioni del sistema, una volta verificato che esso è risolubile, possiamo sfruttare le informazioni sul rango: se conosciamo il minore non singolare della matrice A che ci ha permesso di calcolarne il rango, possiamo cancellare dal sistema tutte le equazioni che non hanno a che fare con quel minore (saranno tutte equazioni superflue) e tenere come incognite del sistema solo quelle le cui colonne stanno nel minore, buttando a destra tutto il resto. In questo modo otteniamo un sistema risolubile e le incognite spostate a destra avranno il ruolo di parametri. Ma cerchiamo di chiarire tutto questo con un esempio.

Esempio 13. Vogliamo studiare il sistema lineare di tre equazioni nelle quattro incognite x, y, z, t

$$\begin{cases} 3x - y + 2z - t = 2 \\ x - y + z - t = 0 \\ x + y + t = 2. \end{cases}$$

Usando il linguaggio delle matrici visto prima scriviamo il sistema nella forma $AX = B$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(si noti che abbiamo completato col valore 0 i coefficienti assenti nelle equazioni). Ora calcoliamo il rango della matrice A; cominciamo prendendo un minore di ordine 2 che contenga lo 0, tanto per semplificare i conti:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & \boxed{-1} & \boxed{1} & -1 \\ 1 & \boxed{1} & \boxed{0} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0(-1) - 1(1) = -1 \neq 0,$$

quindi la matrice ha almeno rango 2. Ora consideriamo i due minori di ordine 3 che lo contengono:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

È facile verificare che entrambi hanno determinante nullo, e dunque $\operatorname{rk} A = 2$. Scriviamo adesso la matrice estesa:

$$A|B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Il rango di questa è almeno 2, perché contiene lo stesso minore di ordine 2 considerato in precedenza. Stavolta i minori di ordine 3 che lo contengono sono tre, ma due di essi li abbiamo appena studiati e sappiamo già che sono singolari. Non resta che calcolare il determinante di

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

che è ancora nullo. Quindi si ha $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A|B = 2$ e il teorema di Rouché-Capelli ci garantisce che il sistema è risolubile. Ma possiamo dire di più: poiché le incognite sono 4 e il rango delle matrici è 2, le soluzioni dipenderanno da $4 - 2 = 2$ parametri. Ancora, poiché il minore che ci ha fornito il rango di A è dato dalle ultime due righe e dalla seconda e terza colonna, procediamo nel seguente modo:

- poiché il minore non singolare non contiene la prima riga della matrice, eliminiamo la corrispondente equazione del sistema, cioè la prima equazione (essa è ridondante);
- poiché la seconda e terza colonna della matrice corrispondono alle incognite y, z, poniamo le altre incognite come parametri del sistema, quindi poniamo $x = \alpha$ e $t = \beta$;
- delle due equazioni rimanenti teniamo a sinistra le incognite rimanenti y, z e portiamo a destra tutto il resto.

Il sistema diventa

$$\begin{cases} x = \alpha \\ -y + z = -\alpha + \beta \\ y = 2 - \alpha - \beta \\ t = \beta \end{cases}$$

e ora è facile trovare le soluzioni (che dipenderanno dai parametri α e β):

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 2 - \alpha - \beta \\ z = 2 - 2\alpha \\ t = \beta \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Un caso interessante è quello dei cosiddetti **sistemi quadrati**, ovvero i sistemi che hanno tante equazioni quante incognite. Stavolta la matrice A del sistema è quadrata e si possono fare delle considerazioni sul suo determinante. In particolare vale la seguente proposizione:

Proposizione 5 *Se la matrice A di un sistema quadrato $AX = B$ è tale che* $\det A \neq 0$*, allora il sistema ammette una e una sola soluzione.*

In particolare, se $\det A \neq 0$ *l'unica soluzione del sistema $AX = 0$ è quella nulla.*

Nota: i sistemi con $B = 0$, cioè con i termini noti tutti nulli, vengono chiamati **sistemi omogenei**.

Dimostrazione. Chiamiamo n l'ordine della matrice quadrata A: allora il sistema ha n equazioni in n incognite e

$$\det A \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rk} A = n.$$

Poiché la matrice estesa ha n righe e $n+1$ colonne, cioè è di tipo $(n, n+1)$, il suo rango non può eccedere n, ma non può neanche essere più piccolo di n, visto che contiene la matrice A. Dunque

$$\mathrm{rk}\, A = \mathrm{rk}\, A|B = n$$

e il Teorema di Rouché-Capelli dice che il sistema è risolubile e la soluzione dipende da $(n-n)$ parametri, cioè da 0 parametri, e dunque è unica.

In particolare, se il sistema è $AX = 0$ è facile vedere che ammette la soluzione nulla, e per quanto appena dimostrato essa è unica. □

Infine enunciamo, ancora senza dimostrazione, il Teorema di Cramer, e ne vediamo un'applicazione.

Teorema 6 (Teorema di Cramer) *Dato un sistema lineare di n equazioni in n incognite $AX = B$ con $\det A \neq 0$, si può scrivere direttamente la soluzione del sistema in questo modo:*

$$x_1 = \frac{\det A_i}{\det A} \quad \dots \quad x_n = \frac{\det A_n}{\det A},$$

dove le matrici A_i sono ottenute sostituendo ogni volta alla i-esima colonna della matrice A la colonna B dei termini noti.

Quindi il teorema di Cramer permette di ottenere direttamente la soluzione di un sistema senza applicare le usuali regole di sostituzione. Però si richiede il calcolo di vari determinanti, e questo fatto rende il metodo molto oneroso dal punto di vista computazionale. Vediamone un esempio nel caso di ordine 3.

Esempio 14. Risolviamo col metodo di Cramer il sistema lineare

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ y + 2z = 2 \\ x - y - z = -1. \end{cases}$$

La matrice del sistema è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

e si può verificare che $\det A = 8 \neq 0$, quindi possiamo applicare il teorema di Cramer.

Sostituendo alla prima colonna della matrice A la colonna dei termini noti otteniamo la matrice

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

e si ha, dopo alcuni conti, $\det A_1 = 2$. Quindi troviamo subito che

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Procedendo in modo simile per la seconda incognita, sostituiamo alla seconda colonna della matrice A la colonna dei termini noti:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Poiché $\det A_2 = 4$, troviamo che

$$y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Infine, sostituiamo all'ultima colonna di A la colonna dei termini noti:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dal fatto che $\det A_3 = 6$ troviamo

$$z = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Quindi la soluzione del sistema è

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

3 Le trasformazioni geometriche rivisitate

Le più generali trasformazioni lineari e omogenee che fissano l'origine del piano si dicono **affinità**. Esse hanno espressione

$$\begin{cases} X = ax + by \\ Y = cx + dy, \end{cases}$$

dove a, b, c, d devono soddisfare la condizione $ad \neq bc$. Le rotazioni, le riflessioni e le omotetie sono tutti casi particolari di affinità. Se abbandoniamo la condizione $ad \neq bc$, parleremo in generale di **trasformazione lineare**. Vogliamo ora riscrivere queste trasformazioni usando il linguaggio delle matrici, che si rivelerà particolarmente efficace e sintetico. Per fare questo, però, dobbiamo prima introdurre un modo alternativo di trattare le coordinate dei punti del piano.

3.1 Vettori e punti del piano

Ormai sappiamo benissimo che i punti del piano cartesiano sono rappresentati da una coppia ordinata di numeri reali: le coordinate $(x; y)$. Lo scorso anno, mediante le coordinate dei punti abbiamo imparato a costruire parecchi oggetti geometrici, come il punto medio, la retta per due punti, l'asse di un segmento, ecc. ecc. Un'operazione che non abbiamo mai fatto è quella di *sommare* le coordinate di due punti:

$$\text{“}P + Q = (x_P + x_Q; y_P + y_Q)\text{”}.$$

Abbiamo messo l'operazione tra virgolette, poiché ci chiediamo: ha un qualche significato geometrico? Ebbene, la somma delle coordinate ha senso se interpretiamo le coordinate $(x;y)$ come un **vettore nel piano**.

Definizione 6 *Chiamiamo* **vettore** $\vec{v}$ *di coordinate* $(x;y)$ *il segmento* $\overrightarrow{OP}$ *che congiunge l'origine con il punto* P *di coordinate* $(x;y)$*, orientato da* O *verso* P*.*

Disegneremo un vettore mettendo una freccia in fondo al segmento, nel punto di arrivo dettato dall'orientazione.

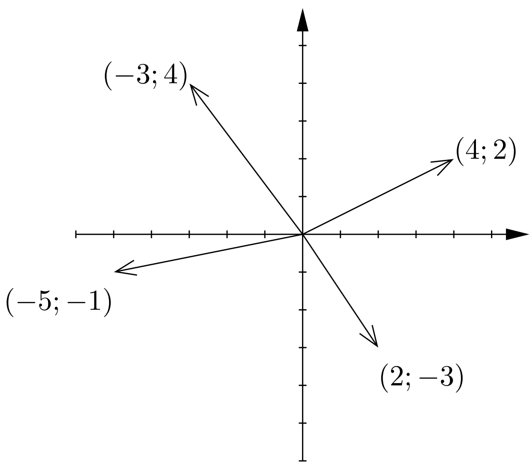


Figura 1: Esempi di vettori

Se interpretiamo le coordinate come vettori, possiamo dare un significato geometrico preciso ed interessante all'operazione di "somma delle coordinate" che abbiamo visto prima: essa coincide con l'usuale operazione di **somma di vettori**:

Definizione 7 *La* **somma** *di due vettori è il vettore dato dalla diagonale maggiore, presa come segmento orientato, del parallelogrammo che ha per lati i due vettori di partenza.*

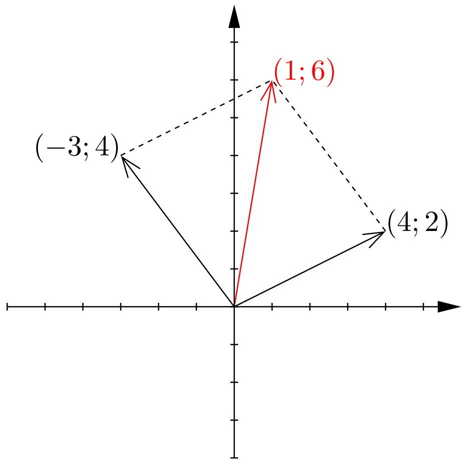


Figura 2: Somma di vettori

In figura possiamo vedere il procedimento per costruire la somma dei vettori di coordinate $(-3;4)$ e $(4;2)$: in rosso abbiamo indicato il vettore dato dalla diagonale del parallelogrammo di lati i due vettori di partenza, e si può notare che le coordinate del vettore somma si ottengono proprio facendo la somma delle coordinate dei vettori iniziali.

Esiste un'operazione analoga detta **prodotto scalare per vettore**, in cui si moltiplica un numero per un vettore: il risultato è un vettore che sta sulla stessa retta di quello di partenza e la cui lunghezza è quella di partenza riscalata del numero (con la convenzione che se il numero è negativo si ribalta il vettore da parte opposta rispetto all'origine. È facile vedere che se $\vec{v}$ ha coordinate $(x;y)$, allora il vettore $a\vec{v}$ ha coordinate $(ax;ay)$. Vediamo in figura il vettore $\vec{v}=(-3;4)$ e i vettori $2\vec{v}$ e $-\frac{1}{2}\vec{v}$.

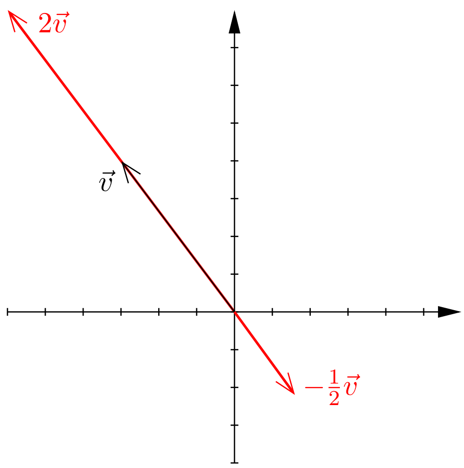


Figura 3: Prodotto di uno scalare per un vettore

Di solito, per non confondere vettori e punti del piano, si usa per i vettori la notazione matriciale

$$\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

dove si scrivono le coordinate del vettore in una matrice-colonna composta da due righe. In questo modo la somma vettoriale e il prodotto di uno scalare per un vettore coincidono con le analoghe operazioni viste in ambito matriciale. Un vettore scritto in questo modo viene anche detto **vettore-colonna**.

Conviene introdurre anche il concetto di **modulo** di un vettore $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, che è definito ponendo

$$\left\| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Se il vettore viene identificato con il corrispondente punto $P = (x; y)$ del piano cartesiano, allora il modulo del vettore

$$\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

è la distanza del punto $P = (x; y)$ dall'origine $O = (0; 0)$.

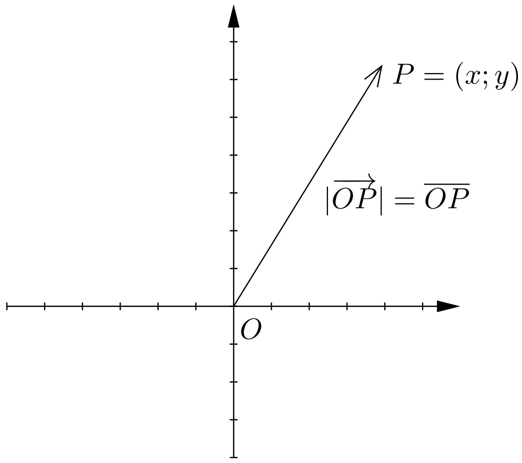


Figura 4: Modulo di un vettore

3.2 Trasformazioni lineari sui vettori

Riprendiamo allora la generica trasformazione lineare vista all'inizio della sezione:

$$\begin{cases} X = ax + by \\ Y = cx + dy \end{cases}$$

Se interpretiamo le coppie $(x; y)$ e $(X; Y)$ come coordinate di vettori, e le scriviamo come vettori-colonna, possiamo riscriverla in forma matriciale come

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Si noti che a destra abbiamo proprio il prodotto di matrici visto nella Sezione 1.2 a pagina 5: la prima matrice è di tipo $(2, 2)$ e la seconda di tipo $(2, 1)$; quindi il risultato è ancora una matrice di tipo $(2, 1)$, cioè un vettore-colonna. Inoltre, nel caso di un'affinità aggiungiamo la condizione $ad \neq bc$, che diventa

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq 0.$$

Denotando con $\vec{V}$ il vettore di coordinate $(X; Y)$, con $\vec{v}$ il vettore di coordinate $(x; y)$ e con A la matrice quadrata di componenti a, b, c, d, l'espressione di un'affinità diventa, molto sinteticamente,

$$\vec{V} = A\vec{v}, \qquad \det A \neq 0.$$

Quindi abbiamo messo in evidenza il seguente fatto:

ogni trasformazione lineare nel piano corrisponde ad una matrice quadrata di ordine 2, e viceversa; in particolare, alle affinità corrispondono matrici non singolari.

3.3 Affinità e matrici

Ora proviamo a vedere come, tra tutte le affinità scritte in forma matriciale, si possano riconoscere le rotazioni, le riflessioni e le omotetie.

Rotazioni

Le rotazioni si scrivono come

$$\begin{cases} X = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ Y = x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases}$$

Con il linguaggio matriciale appena introdotto possiamo ora dire che la **matrice di una rotazione** è una matrice del tipo

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad \alpha \in [0; 2\pi[.$$

Queste matrici hanno alcune proprietà interessanti.

(1) Il determinante della matrice di una rotazione è 1, cioè $\det R_\alpha = 1$ per ogni α.

Infatti, calcolando il determinante con la nota formula $ad - bc$ otteniamo

$$\det \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Questo fatto ha un'interpretazione geometrica molto importante, anche se ovvia: ci dice che la rotazione non cambia l'area di una figura. Vale infatti una proprietà notevole per le trasformazioni lineari, che enunciamo senza dimostrare:

Teorema 7 *Data una figura piana di area S, l'area della figura piana ottenuta dopo una trasformazione lineare di matrice A è data da*

$$|\det A|\, S.$$

Quindi il determinante della matrice di una trasformazione lineare, preso in valore assoluto, indica quanto cambia l'area delle figure dopo la trasformazione. Un'affinità rappresentata da una matrice di determinante 1 è una trasformazione che non cambia le aree delle figure.[8] Invece, una trasformazione lineare che non sia un'affinità ha determinante nullo, e quindi "schiaccia" tutte le figure riducendole ad avere area nulla.

(2) Si ha

$$R_\alpha R_\beta = R_\beta R_\alpha = R_{\alpha+\beta},$$

quindi in particolare il prodotto di due matrici di rotazione è commutativo e dà ancora una matrice di rotazione.

Infatti, provando a calcolare il prodotto delle matrici si ha

$$\begin{aligned} R_\alpha R_\beta &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Se ora usiamo le formule di addizione di seno e coseno nell'ultima matrice, otteniamo

$$R_\alpha R_\beta = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = R_{\alpha+\beta}.$$

(3) La matrice inversa di R_α è la matrice

$$R_{-\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Infatti, calcolando il prodotto tra R_α e $R_{-\alpha}$ otteniamo

$$\begin{aligned} R_\alpha R_{-\alpha} &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e usando la relazione goniometrica fondamentale troviamo subito

$$R_\alpha R_{-\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si può inoltre verificare che l'inversa di una matrice di rotazione coincide con la sua trasposta. Questo fatto suggerisce una definizione che valga per ogni ordine n.

[8] Naturalmente la rotazione conserva molto di più dell'area: essa conserva addirittura le *distanze*, cioè è un'**isometria**.

Definizione 8 *Una matrice quadrata R si chiama* **matrice ortogonale** *se la sua inversa coincide con la sua trasposta, cioè se*

$$R^T = R^{-1}.$$

Tale richiesta equivale ad affermare che il prodotto (righe per colonne) di R per la sua trasposta sia la matrice identica.

Quindi le matrici di rotazione sono le matrici ortogonali di ordine 2 che abbiano determinante 1.

Esempio 15. Prendiamo il vettore-colonna $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$; vogliamo ruotare il vettore dell'angolo $\pi/6$.

Per calcolare le coordinate del vettore ruotato, costruiamo la matrice di rotazione corrispondente all'angolo $\pi/6$:

$$\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

e la applichiamo al vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \\ \frac{1}{2} + \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

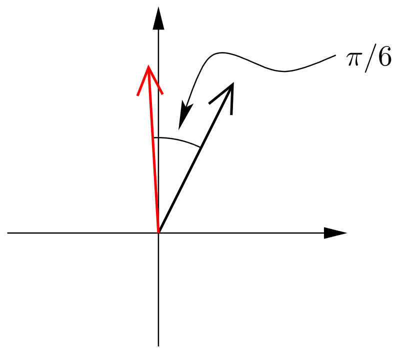


Figura 5: In nero il vettore di partenza, in rosso quello ruotato di $\pi/6$.

Riflessioni

Le riflessioni hanno equazione data da

$$\begin{cases} X = x\cos 2\alpha + y\sin 2\alpha \\ Y = x\sin 2\alpha - y\cos 2\alpha. \end{cases}$$

e ricordiamo che l'asse della riflessione è dato dalla retta $y = (\tan\alpha)x$. Quindi la matrice di una riflessione è della forma

$$\begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix} \qquad \alpha \in [0;\pi[,$$

Rinominando il parametro, poniamo $\beta = 2\alpha$ e introduciamo la generica **matrice di riflessione**

$$Q_\beta = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{bmatrix} \qquad \beta \in [0;2\pi[,$$

con asse della riflessione dato dalla retta $y = \tan(\beta/2)x$. Come le matrici di rotazione, anche le matrici di riflessione soddisfano alcune proprietà interessanti.

(1) Il determinante di una matrice di riflessione è -1, cioè $\det Q_\beta = -1$ per ogni β.

Infatti, proviamo a calcolare questo determinante:

$$\det Q_\beta = \det \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{bmatrix} = -\cos^2\beta - \sin^2\beta = -1.$$

Che cosa significa dal punto di vista dell'area che il determinante sia -1? Significa che l'area delle figure non cambia, come abbiamo già visto, poiché il valore assoluto del determinante è 1. Però ci dice anche qualcosa d'altro: il determinante *negativo* indica che le figure vengono "rovesciate", esattamente come uno si aspetta da una riflessione.

(2) Si ha $Q_\alpha Q_\beta = R_{\alpha-\beta}$, cioè il prodotto di due matrici di riflessione è una matrice di rotazione.

Infatti, calcoliamo il prodotto:

$$\begin{aligned} Q_\alpha Q_\beta &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Applicando le formule di addizione di seno e coseno troviamo

$$Q_\alpha Q_\beta = \begin{bmatrix} \cos(\alpha-\beta) & -\sin(\alpha-\beta) \\ \sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta) \end{bmatrix} = R_{\alpha-\beta}.$$

Non è detto quindi che il prodotto di riflessioni sia commutativo, infatti:

$$Q_\alpha Q_\beta = R_{\alpha-\beta}, \qquad Q_\beta Q_\alpha = R_{\beta-\alpha}.$$

Poiché si ha $R_{\alpha-\beta} = R_{\beta-\alpha}$ se e solo se

$$\alpha - \beta = \beta - \alpha + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad \alpha - \beta = k\pi,$$

avremo che in generale il prodotto di matrici di riflessione *non è commutativo*, tranne che in alcuni casi particolari.

(3) La matrice inversa di una riflessione Q_α è la stessa matrice Q_α.

Ciò è ovvio dal punto di vista geometrico, poiché applicare due volte la stessa riflessione vuol dire tornare alla situazione di partenza. E infatti lo possiamo verificare col prodotto di matrici:

$$Q_\alpha Q_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poiché le matrici di riflessione sono simmetriche, cioè $Q_\alpha = Q_\alpha^T$, la proprietà appena vista mostra che

$$Q_\alpha^{-1} = Q_\alpha = Q_\alpha^T,$$

quindi anche le matrici di riflessione sono delle particolari matrici ortogonali viste nella Definizione 8 a pagina 29: sono quelle di determinante -1.

Omotetie

Infine consideriamo la generica omotetia di rapporto $r > 0$ che fissa l'origine:

$$\begin{cases} X = rx \\ Y = ry, \end{cases}$$

La matrice di un'omotetia è molto semplice, poiché è un multiplo positivo della matrice identica:

$$P_r = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad r > 0.$$

Il determinante di questa matrice è r^2, quindi per le proprietà viste prima abbiamo subito che:

- per $0 < r < 1$, cioè quando l'omotetia è una contrazione, essa rimpicciolisce le aree;
- per $r > 1$, cioè quando l'omotetia è una dilatazione, essa ingrandisce le aree.

Si possono considerare anche omotetie con $r < 0$, ovvero multipli negativi della matrice identica: il determinante rimane comunque positivo e la trasformazione geometrica associata è un'omotetia di rapporto $|r|$ composta con una rotazione di 180°.

Affinità che non fissano l'origine

L'espressione più generale per una trasformazione lineare, se non richiediamo che fissi l'origine, è

$$\begin{cases} X = ax + by + e \\ Y = cx + dy + f, \end{cases}$$

come abbiamo visto nel capitolo sulle Trasformazioni geometriche. Tale espressione può ancora essere scritta col linguaggio delle matrici:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}.$$

Quindi questa trasformazione è caratterizzata da una matrice quadrata di ordine 2 e da un vettore. Denotando con $\vec{V}$ il vettore di coordinate $(X; Y)$, con $\vec{v}$ il vettore di coordinate

$(x; y)$, con $\vec{b}$ il vettore di coordinate $(e; f)$ e con A la matrice quadrata di componenti a, b, c, d, l'espressione dell'affinità diventa

$$\vec{V} = A\vec{v} + \vec{b}.$$

Ad esempio, se scegliamo come A la matrice identica, otteniamo la trasformazione

$$\vec{V} = \vec{v} + \vec{b}$$

che è proprio una **traslazione** di vettore $\vec{b}$. Se invece scegliamo come A una matrice di rotazione R_α, otteniamo la trasformazione

$$\vec{V} = R_\alpha \vec{v} + \vec{b}$$

che è una generica **rototraslazione**. In particolare, per avere una rototraslazione **di centro** $\vec{c} = (x_0; y_0)$ e angolo di rotazione α dovremo prendere la trasformazione lineare

$$\vec{V} = R_\alpha(\vec{v} - \vec{c}) + \vec{c} = R_\alpha \vec{v} - R_\alpha \vec{c} + \vec{c}$$

e quindi dovremo scegliere come vettore di traslazione il vettore

$$\vec{b} = -R_\alpha \vec{c} + \vec{c}.$$

3.4 Composizione di trasformazioni lineari

Le trasformazioni lineari possono essere applicate in successione una dopo l'altra, e il risultato è ancora una trasformazione lineare. Dal punto di vista delle matrici, la composizione di trasformazioni lineari è semplicemente il *prodotto delle matrici*, ovviamente prese nel giusto ordine. Ad esempio, se vogliamo trovare la matrice che rappresenta la trasformazione in cui si applica *prima* una rotazione di angolo α e *poi* una riflessione di parametro β, dovremo effettuare il prodotto tra le matrici delle due trasformazioni, mettendo quella della riflessione a sinistra e quella della rotazione a destra:

$$\begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Calcolando tale prodotto otteniamo la matrice

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta-\alpha) & \sin(\beta-\alpha) \\ \sin(\beta-\alpha) & -\cos(\beta-\alpha) \end{bmatrix},$$

che è la matrice della trasformazione lineare ottenuta dalla composizione delle due. Si noti che in questo caso abbiamo ottenuto una riflessione di parametro $\beta - \alpha$. Si può provare a verificare per esercizio che, se avessimo applicato prima la riflessione di parametro β e poi la rotazione di angolo α, avremmo ottenuto una riflessione di parametro $\alpha + \beta$.

Osservazione 3. Quando effettuiamo il prodotto di matrici di trasformazioni lineari, dobbiamo mettere più a destra la matrice della prima trasformazione applicata e procedere via via verso sinistra con le altre matrici nell'ordine di applicazione.

Esempio 16. Vogliamo calcolare la matrice della trasformazione lineare ottenuta applicando una rotazione di $\pi/2$, poi una riflessione attorno alla bisettrice $y = x$, infine un'omotetia di rapporto 2.

La matrice della rotazione è data da

$$\begin{bmatrix} \cos\pi/2 & -\sin\pi/2 \\ \sin\pi/2 & \cos\pi/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ricordando che l'asse di una riflessione di parametro β è dato da

$$y = \tan(\beta/2)x,$$

per trovare il parametro della riflessione attorno a $y = x$ dobbiamo risolvere la semplice equazione goniometrica

$$\tan\frac{\beta}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\pi}{2},$$

e quindi la matrice della riflessione è data da

$$\begin{bmatrix} \cos\pi/2 & \sin\pi/2 \\ \sin\pi/2 & -\cos\pi/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Infine, la matrice dell'omotetia di rapporto 2 è semplicemente

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ora scriviamo il prodotto delle tre matrici, disponendole in ordine da destra verso sinistra:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare questo prodotto sfruttiamo la proprietà associativa, e quindi calcoliamo, ad esempio, il prodotto delle prime due e lo moltiplichiamo per la terza:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Quindi la matrice della trasformazione lineare complessiva è data da $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Riepilogo

Richiamiamo sinteticamente i concetti più importanti introdotti in questo capitolo.

- matrice di tipo (n, k): tabella rettangolare di numeri con n righe e k colonne
- matrice quadrata: quando $n = k$
- matrice trasposta: scambio le righe con le colonne
- prodotto righe per colonne: si può fare quando le colonne della prima sono tante quante le righe della seconda e
$$(AB)_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} b_{sj}$$
- $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$
- determinante di matrici di ordine 3: regola di Sarrus
- determinante di matrici di ordine più grande: sviluppo di Laplace
- Teorema di Binet: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
- matrice inversa: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{cof} A^T$
- rango: ordine del più grande minore non singolare
- Teorema di Rouché-Capelli: $AX = B$ è risolubile se e solo se $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A|B$
- matrici ortogonali: $R^T = R^{-1}$
- trasformazioni lineari e matrici di ordine 2:
  - affinità $\rightarrow$ matrici non singolari
  - rotazioni $\rightarrow$ matrici ortogonali con determinante 1
  - riflessioni $\rightarrow$ matrici ortogonali con determinante -1
  - omotetie $\rightarrow$ multipli positivi della matrice identica