Teoria degli insiemi

Marco Degiovanni

Università Cattolica del Sacro Cuore

L'organizzazione delle conoscenze matematiche

L'organizzazione delle conoscenze matematiche

Figura: L'affresco *Scuola di Atene* (1509–1511) di Raffaello Sanzio, Stanza della Segnatura, Palazzi Apostolici.

L'organizzazione delle conoscenze matematiche

Figura: L'affresco *Scuola di Atene* (1509–1511) di Raffaello Sanzio, Stanza della Segnatura, Palazzi Apostolici.

Guardiamo in basso a destra ...

L'organizzazione delle conoscenze matematiche

Figura: Euclide all'interno dell'affresco *Scuola di Atene*.

Euclide (IV secolo a.C. - III secolo a.C.), matematico e filosofo greco.

L'organizzazione delle conoscenze matematiche

Figura: Euclide all'interno dell'affresco *Scuola di Atene*.

Euclide (IV secolo a.C. - III secolo a.C.), matematico e filosofo greco.
Sul finire del IV secolo a.C., il faraone Tolomeo I istituì ad Alessandria d'Egitto il *Museo*, dove Euclide insegnò per anni, componendovi gli *Elementi*.

Il concetto di **conseguenza logica**

Il concetto di **conseguenza logica**

Premesse:

$$\text{tutti gli uomini sono mortali} \qquad (P_1)$$

$$\text{Socrate è un uomo} \qquad (P_2)$$

Il concetto di **conseguenza logica**

Premesse:

$$\text{tutti gli uomini sono mortali} \qquad (P_1)$$
$$\text{Socrate è un uomo} \qquad (P_2)$$

Conclusione:

$$\text{Socrate è mortale} \qquad (C)$$

Il concetto di **conseguenza logica**

Premesse:

$$\text{tutti gli uomini sono mortali} \qquad (P_1)$$
$$\text{Socrate è un uomo} \qquad (P_2)$$

Conclusione:

$$\text{Socrate è mortale} \qquad (C)$$

L'affermazione (C) è *conseguenza logica* di (P_1) e (P_2).

Il concetto di **conseguenza logica**

Premesse:

tutti le città lombarde sono in Italia	(P_1)
Brescia è una città lombarda	(P_2)

Il concetto di **conseguenza logica**

Premesse:

$$\text{tutti le città lombarde sono in Italia} \qquad (P_1)$$
$$\text{Brescia è una città lombarda} \qquad (P_2)$$

Conclusione:

$$\text{Brescia è in Italia} \qquad (C)$$

Il concetto di **conseguenza logica**

Premesse:

$$\text{tutti le città lombarde sono in Italia} \qquad (P_1)$$
$$\text{Brescia è una città lombarda} \qquad (P_2)$$

Conclusione:

$$\text{Brescia è in Italia} \qquad (C)$$

Una conclusione è *conseguenza logica* di un complesso di premesse, se **non esiste** nessuna interpretazione che rende vere le premesse e falsa la conclusione.

Logica **formale**

Logica **formale**

Premesse:

Elisabetta I è discendente di Enrico VIII	(P_1)
Enrico VIII è discendente di Enrico VII	(P_2)

Logica **formale**

Premesse:

Elisabetta I è discendente di Enrico VIII (P_1)

Enrico VIII è discendente di Enrico VII (P_2)

Conclusione:

Elisabetta I è discendente di Enrico VII (C)

Logica **formale**

Premesse:

Elisabetta I è discendente di Enrico VIII (P_1)

Enrico VIII è discendente di Enrico VII (P_2)

Conclusione:

Elisabetta I è discendente di Enrico VII (C)

Si può dire che (C) è conseguenza logica di (P_1) e (P_2)?

Logica **formale**

Premesse:

Elisabetta I è discendente di Enrico VIII (P_1)
Enrico VIII è discendente di Enrico VII (P_2)

Conclusione:

Elisabetta I è discendente di Enrico VII (C)

Si può dire che (C) è conseguenza logica di (P_1) e (P_2)?

NO!

Logica **formale**

Premesse:

$$\text{Elisabetta I è figlia di Enrico VIII} \qquad (P_1)$$
$$\text{Enrico VIII è figlio di Enrico VII} \qquad (P_2)$$

Logica **formale**

Premesse:

$$\text{Elisabetta I è figlia di Enrico VIII} \qquad (P_1)$$
$$\text{Enrico VIII è figlio di Enrico VII} \qquad (P_2)$$

Conclusione:

$$\text{Elisabetta I è figlia di Enrico VII} \qquad (C)$$

Logica **formale**

Premesse:

$$\text{Elisabetta I è figlia di Enrico VIII} \qquad (P_1)$$
$$\text{Enrico VIII è figlio di Enrico VII} \qquad (P_2)$$

Conclusione:

$$\text{Elisabetta I è figlia di Enrico VII} \qquad (C)$$

In questa interpretazione risulta che (P_1) e (P_2) sono vere, mentre (C) è falsa.

Logica **formale**

Premesse:

$$\text{Elisabetta I è figlia di Enrico VIII} \qquad (P_1)$$
$$\text{Enrico VIII è figlio di Enrico VII} \qquad (P_2)$$

Conclusione:

$$\text{Elisabetta I è figlia di Enrico VII} \qquad (C)$$

In questa interpretazione risulta che (P_1) e (P_2) sono vere, mentre (C) è falsa.
Aggiungiamo una premessa ...

Logica **formale**

Premesse:

Elisabetta I è discendente di Enrico VIII	(P_1)
Enrico VIII è discendente di Enrico VII	(P_2)
la relazione "essere discendente" soddisfa la proprietà transitiva	(P_3)

Logica **formale**

Premesse:

Elisabetta I è discendente di Enrico VIII (P_1)

Enrico VIII è discendente di Enrico VII (P_2)

la relazione “essere discendente” soddisfa la proprietà transitiva (P_3)

Conclusione:

Elisabetta I è discendente di Enrico VII (C)

Logica **formale**

Premesse:

$$\begin{array}{ll} \text{Elisabetta I è discendente di Enrico VIII} & (P_1) \\ \text{Enrico VIII è discendente di Enrico VII} & (P_2) \\ \text{la relazione “essere discendente” soddisfa} & (P_3) \\ \text{la proprietà transitiva} & \end{array}$$

Conclusione:

$$\text{Elisabetta I è discendente di Enrico VII} \qquad (C)$$

Adesso si può dire che (C) è conseguenza logica di (P_1), (P_2) e (P_3).

Logica **formale**

Premesse:

7 è maggiore di 6	(P_1)
6 è maggiore di 4	(P_2)
la relazione "essere maggiore" soddisfa la proprietà transitiva	(P_3)

Logica **formale**

Premesse:

7 è maggiore di 6 (P_1)
6 è maggiore di 4 (P_2)
la relazione "essere maggiore" soddisfa la proprietà transitiva (P_3)

Conclusione:

7 è maggiore di 4 (C)

Logica **formale**

Premesse:

$$\begin{array}{ll} \text{7 è maggiore di 6} & (P_1) \\ \text{6 è maggiore di 4} & (P_2) \\ \text{la relazione “essere maggiore” soddisfa} & (P_3) \\ \text{la proprietà transitiva} & \end{array}$$

Conclusione:

$$\text{7 è maggiore di 4} \qquad (C)$$

Di nuovo si può dire che (C) è conseguenza logica di (P_1), (P_2) e (P_3).

Logica **formale**

Premesse:

Cavour è discendente di Giulio Cesare	(P_1)
Albano è discendente di Cavour	(P_2)
la relazione "essere discendente" soddisfa la proprietà transitiva	(P_3)

Logica **formale**

Premesse:

Cavour è discendente di Giulio Cesare (P_1)

Albano è discendente di Cavour (P_2)

la relazione "essere discendente" soddisfa la proprietà transitiva (P_3)

Conclusione:

Albano è discendente di Giulio Cesare (C)

Logica **formale**

Premesse:

Cavour è discendente di Giulio Cesare	(P_1)
Albano è discendente di Cavour	(P_2)
la relazione "essere discendente" soddisfa la proprietà transitiva	(P_3)

Conclusione:

Albano è discendente di Giulio Cesare	(C)

Di nuovo **si può dire** che (C) è conseguenza logica di (P_1), (P_2) e (P_3).

Logica **formale**

Qualunque affermazione è conseguenza logica di un complesso di premesse *contraddittorio*.

Logica **formale**

Qualunque affermazione è conseguenza logica di un complesso di premesse *contraddittorio*.
Infatti, in questo caso, non esiste nessuna interpretazione che rende vere le premesse,

Logica **formale**

Qualunque affermazione è conseguenza logica di un complesso di premesse *contraddittorio*.
Infatti, in questo caso, non esiste nessuna interpretazione che rende vere le premesse,
men che meno può esistere una interpretazione che rende vere le premesse e falsa la conclusione.

Capire che la conseguenza logica sussiste

Capire che la conseguenza logica sussiste

Figura: Cartesio, dipinto di Frans Hals (1649).

René Descartes, in latino Renatus Cartesius
(La Haye en Touraine, 31 marzo 1596 -
Stoccolma, 11 febbraio 1650).

Capire che la conseguenza logica sussiste

Figura: Cartesio, dipinto di Frans Hals (1649).

René Descartes, in latino Renatus Cartesius
(La Haye en Touraine, 31 marzo 1596 -
Stoccolma, 11 febbraio 1650).
La Matematica è una successione di evidenze.

Capire che la conseguenza logica sussiste

Figura: Cartesio, dipinto di Frans Hals (1649).

René Descartes, in latino Renatus Cartesius
(La Haye en Touraine, 31 marzo 1596 -
Stoccolma, 11 febbraio 1650).
La Matematica è una successione di evidenze.
Scomposizione di concetti complessi in altri più semplici.

Capire che la conseguenza logica sussiste

Un altro percorso:

Capire che la conseguenza logica sussiste

Un altro percorso:

si introduce una schematizzazione a cui deve attenersi la formulazione delle affermazioni;

Capire che la conseguenza logica sussiste

Un altro percorso:

si introduce una schematizzazione a cui deve attenersi la formulazione delle affermazioni;

si dichiarano ammissibili certe "mosse" sugli ingredienti della schematizzazione (*regole di inferenza*);

Capire che la conseguenza logica sussiste

Un altro percorso:

- si introduce una schematizzazione a cui deve attenersi la formulazione delle affermazioni;
- si dichiarano ammissibili certe "mosse" sugli ingredienti della schematizzazione (*regole di inferenza*);
- una conclusione (schematizzata) si dice *deducibile* da un complesso di premesse (esse stesse schematizzate), se è ottenibile dalle premesse con un certo numero finito di "mosse".

Capire che la conseguenza logica sussiste

Un altro percorso:

- si introduce una schematizzazione a cui deve attenersi la formulazione delle affermazioni;
- si dichiarano ammissibili certe "mosse" sugli ingredienti della schematizzazione (*regole di inferenza*);
- una conclusione (schematizzata) si dice *deducibile* da un complesso di premesse (esse stesse schematizzate), se è ottenibile dalle premesse con un certo numero finito di "mosse".

Il complesso costituito da schematizzazione e regole di inferenza di chiama *sistema formale*.

Capire che la conseguenza logica sussiste

Due concetti diversi:

Capire che la conseguenza logica sussiste

Due concetti diversi:

essere conseguenza logica	concetto **semantico**
essere deducibile	concetto **sintattico**

Capire che la conseguenza logica sussiste

Due concetti diversi:

essere conseguenza logica	concetto **semantico**
essere deducibile	concetto **sintattico**

Un sistema formale è:

Capire che la conseguenza logica sussiste

Due concetti diversi:

essere conseguenza logica	concetto **semantico**
essere deducibile	concetto **sintattico**

Un sistema formale è:

corretto se l'essere deducibile garantisce l'essere conseguenza logica;

Capire che la conseguenza logica sussiste

Due concetti diversi:

essere conseguenza logica	concetto **semantico**
essere deducibile	concetto **sintattico**

Un sistema formale è:

corretto se l'essere deducibile garantisce l'essere conseguenza logica;

semanticamente completo se l'essere conseguenza logica garantisce l'essere deducibile.

Capire che la conseguenza logica sussiste

Due concetti diversi:

essere conseguenza logica	concetto **semantico**
essere deducibile	concetto **sintattico**

Un sistema formale è:

corretto se l'essere deducibile garantisce l'essere conseguenza logica;

semanticamente completo se l'essere conseguenza logica garantisce l'essere deducibile.

Questione da tenere in grande considerazione:

Capire che la conseguenza logica sussiste

Due concetti diversi:

essere conseguenza logica	concetto **semantico**
essere deducibile	concetto **sintattico**

Un sistema formale è:

corretto se l'essere deducibile garantisce l'essere conseguenza logica;

semanticamente completo se l'essere conseguenza logica garantisce l'essere deducibile.

Questione da tenere in grande considerazione:
qual è la *capacità espressiva* del sistema formale, tenuto conto che si possono considerare solo le affermazioni schematizzate in un certo modo?

Capire che la conseguenza logica sussiste

Alcuni sistemi formali:

Capire che la conseguenza logica sussiste

Alcuni sistemi formali:

logica proposizionale,
già descritta sostanzialmente dagli Stoici
(IV secolo a.C. - III secolo a.C.)
è corretta e semanticamente completa, ma ha una scarsa capacità espressiva; tuttavia è alla base dei più importanti sviluppi contemporanei;

Capire che la conseguenza logica sussiste

Alcuni sistemi formali:

- *logica proposizionale*,
  già descritta sostanzialmente dagli Stoici
  (IV secolo a.C. - III secolo a.C.)
  è corretta e semanticamente completa, ma ha una scarsa capacità espressiva; tuttavia è alla base dei più importanti sviluppi contemporanei;
- *logica aristotelica*
  è corretta, non semanticamente completa, con una capacità espressiva maggiore, ma comunque insufficiente per la Matematica.

Capire che la conseguenza logica sussiste

La questione se la logica aristotelica potesse diventare anche semanticamente completa, aggiungendo ulteriori regole di inferenza, rimase a lungo aperta.

Capire che la conseguenza logica sussiste

La questione se la logica aristotelica potesse diventare anche semanticamente completa, aggiungendo ulteriori regole di inferenza, rimase a lungo aperta.

Figura: Leibniz, Biblioteca regionale di Hannover.

Gottfried Wilhelm von Leibniz
(Lipsia, 1° luglio 1646 -
Hannover, 14 novembre 1716)
dimostrò che era impossibile renderla semanticamente completa.

Logica del primo ordine

Figura: Frege.

Friedrich Ludwig Gottlob Frege
(Wismar, 8 novembre 1848 -
Bad Kleinen, 26 luglio 1925)

Logica del primo ordine

Figura: Frege.

Friedrich Ludwig Gottlob Frege
(Wismar, 8 novembre 1848 -
Bad Kleinen, 26 luglio 1925)
Pubblica nel 1879 a Halle *Begriffsschrift* (*Ideografia*), in cui introduce la
logica del primo ordine.

Logica del primo ordine

Dagli studi suoi e di studiosi successivi risulta che la logica del primo ordine è corretta, semanticamente completa e possiede una capacità espressiva adeguata per la Matematica.

Logica del primo ordine

Dagli studi suoi e di studiosi successivi risulta che la logica del primo ordine è corretta, semanticamente completa e possiede una capacità espressiva adeguata per la Matematica.

Figura: Gödel nel 1925.

Kurt Friedrich Gödel (Brno, 28 aprile 1906 - Princeton, 14 gennaio 1978) dimostra nel 1929 la completezza semantica della logica del primo ordine.

La gestione dell'infinito

La gestione dell'infinito

Infinito potenziale:

La gestione dell'infinito

Infinito potenziale:
Anche se gli oggetti a disposizione sono infiniti, avviene che all'interno di ogni singolo ragionamento solo un numero finito di questi viene preso in considerazione.

La gestione dell'infinito

Infinito potenziale:
Anche se gli oggetti a disposizione sono infiniti, avviene che all'interno di ogni singolo ragionamento solo un numero finito di questi viene preso in considerazione.

Infinito attuale:

La gestione dell'infinito

Infinito potenziale:
Anche se gli oggetti a disposizione sono infiniti, avviene che all'interno di ogni singolo ragionamento solo un numero finito di questi viene preso in considerazione.

Infinito attuale:
Si ammettono ragionamenti in cui si opera su infiniti oggetti *contemporaneamente*.

La gestione dell'infinito

Infinito potenziale:
Anche se gli oggetti a disposizione sono infiniti, avviene che all'interno di ogni singolo ragionamento solo un numero finito di questi viene preso in considerazione.

Infinito attuale:
Si ammettono ragionamenti in cui si opera su infiniti oggetti *contemporaneamente*.

Per più di due millenni solo l'infinito potenziale è considerato ammissibile.

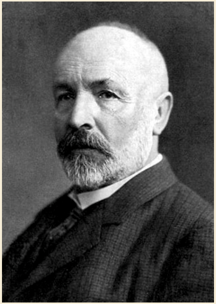

Figura: Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor
(San Pietroburgo, 3 marzo 1845 - Halle, 6 gennaio 1918)
pubblica nel 1872 *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*.

La gestione dell'infinito

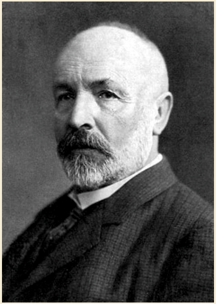

Figura: Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor
(San Pietroburgo, 3 marzo 1845 - Halle, 6 gennaio 1918)
pubblica nel 1872 *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*.

La teoria ideato da Cantor per gestire l'infinito attuale prenderà il nome di *Teoria degli insiemi*.

La gestione dell'infinito

La prima Teoria degli insiemi compiutamente assiomatizzata è quella di Zermelo-Skolem-Fraenkel o Zermelo-Fraenkel (ZF).

La gestione dell'infinito

La prima Teoria degli insiemi compiutamente assiomatizzata è quella di Zermelo-Skolem-Fraenkel o Zermelo-Fraenkel (ZF).

Figura: Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo
(Berlino, 27 luglio 1871 - Friburgo, 21 maggio 1953)
pubblica nel 1908 *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I*.

La gestione dell'infinito

Figura: Albert Thoralf Skolem
(Sandsvær, 23 maggio 1887 - Oslo, 23 marzo 1963)
pubblica nel 1922 *Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre*.

La gestione dell'infinito

Figura: Adolf Abraham Halevi Fraenkel
(Monaco di Baviera, 17 febbraio 1891 - Gerusalemme, 15 ottobre 1965)
pubblica nel 1922 *Zu den Grundlage der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre*.

La gestione dell'infinito

Dai lavori di questi e altri studiosi emerge che l'intera Matematica è riconducibile alla Teoria degli insiemi.

La gestione dell'infinito

Dai lavori di questi e altri studiosi emerge che l'intera Matematica è riconducibile alla Teoria degli insiemi.

Nel corso del XX secolo la riorganizzazione della Matematica, basata sulla Teoria degli insiemi e formulata nel linguaggio della Logica del primo ordine, si afferma gradatamente e rappresenta oggi lo standard condiviso a livello internazionale.

Alcuni elementi di logica

Prima nozione fondamentale:

Alcuni elementi di logica

Prima nozione fondamentale:
affermazione (o *proposizione* o *enunciato*).

Prima nozione fondamentale:
affermazione (o *proposizione* o *enunciato*).
Esempi di affermazione sono i seguenti:

$$2 < 7\,,$$

$$2^3 > 9\,.$$

Prima nozione fondamentale:
affermazione (o *proposizione* o *enunciato*).
Esempi di affermazione sono i seguenti:

$$2 < 7\,,$$

$$2^3 > 9\,.$$

Un'affermazione può essere **vera** o **falsa**.

Prima nozione fondamentale:
affermazione (o *proposizione* o *enunciato*).
Esempi di affermazione sono i seguenti:

$$2 < 7\,,$$

$$2^3 > 9\,.$$

Un'affermazione può essere **vera** o **falsa**.
Nel seguito denoteremo le affermazioni con lettere del tipo $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, etc.

Alcuni elementi di logica

Come nel linguaggio comune, molte affermazioni si ottengono combinando opportunamente affermazioni più elementari.

Come nel linguaggio comune, molte affermazioni si ottengono combinando opportunamente affermazioni più elementari.
Il modo più semplice è la *negazione*.

Alcuni elementi di logica

Come nel linguaggio comune, molte affermazioni si ottengono combinando opportunamente affermazioni più elementari.
Il modo più semplice è la *negazione*.
Se $\mathcal{P}$ è un'affermazione, *non* $\mathcal{P}$ è l'affermazione che è vera quando $\mathcal{P}$ è falsa e viceversa.

Come nel linguaggio comune, molte affermazioni si ottengono combinando opportunamente affermazioni più elementari.
Il modo più semplice è la *negazione*.
Se $\mathcal{P}$ è un'affermazione, $\mathit{non}\,\mathcal{P}$ è l'affermazione che è vera quando $\mathcal{P}$ è falsa e viceversa.
La seguente tavola riassume questa caratterizzazione:

$\mathcal{P}$	V	F
$\mathit{non}\,\mathcal{P}$	F	V

Un secondo modo è la *congiunzione*.

Un secondo modo è la *congiunzione*.
Se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono due affermazioni, $\mathcal{P}\, e\, \mathcal{Q}$ è l'affermazione che è vera quando $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono entrambe vere.

Un secondo modo è la *congiunzione*.
Se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono due affermazioni, $\mathcal{P}\, e\, \mathcal{Q}$ è l'affermazione che è vera quando $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono entrambe vere.
La tavola corrispondente è:

$\mathcal{P}$	V	V	F	F
$\mathcal{Q}$	V	F	V	F
$\mathcal{P}\, e\, \mathcal{Q}$	V	F	F	F

Un terzo modo è la *disgiunzione*.

Un terzo modo è la *disgiunzione*.
Se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono due affermazioni, $\mathcal{P}\ o\ \mathcal{Q}$ è l'affermazione che è vera quando *almeno* una delle due affermazioni è vera. In particolare, se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono entrambe vere, $\mathcal{P}\ o\ \mathcal{Q}$ è vera.

Un terzo modo è la *disgiunzione*.
Se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono due affermazioni, $\mathcal{P}\, o\, \mathcal{Q}$ è l'affermazione che è vera quando *almeno* una delle due affermazioni è vera. In particolare, se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono entrambe vere, $\mathcal{P}\, o\, \mathcal{Q}$ è vera.
La tavola è:

$\mathcal{P}$	V	V	F	F
$\mathcal{Q}$	V	F	V	F
$\mathcal{P}\, o\, \mathcal{Q}$	V	V	V	F

Un quarto modo, meno ovvio, è l'*implicazione*.

Alcuni elementi di logica

Un quarto modo, meno ovvio, è l'*implicazione*.
Per comprendere il funzionamento di $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ ("$\mathcal{P}$ implica $\mathcal{Q}$" o anche "se $\mathcal{P}$ allora $\mathcal{Q}$"), consideriamo un'espressione del tipo

$$\Big(n \text{ è un multiplo di } 6\Big) \Longrightarrow \Big(n \text{ è un multiplo di } 3\Big),$$

dove n denota un numero intero positivo.

Un quarto modo, meno ovvio, è l'*implicazione*.
Per comprendere il funzionamento di $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ ("$\mathcal{P}$ implica $\mathcal{Q}$" o anche "se $\mathcal{P}$ allora $\mathcal{Q}$"), consideriamo un'espressione del tipo

$$\Big(n \text{ è un multiplo di } 6\Big) \Longrightarrow \Big(n \text{ è un multiplo di } 3\Big),$$

dove n denota un numero intero positivo.
Noi vogliamo che questa asserzione abbia carattere generale, ossia che sia vera per ogni n.

Per ottenere questo risultato è anzitutto necessario fare in modo che le affermazioni

Per ottenere questo risultato è anzitutto necessario fare in modo che le affermazioni

$$\Big(\text{12 è un multiplo di 6}\Big) \Longrightarrow \Big(\text{12 è un multiplo di 3}\Big),$$

Alcuni elementi di logica

Per ottenere questo risultato è anzitutto necessario fare in modo che le affermazioni

$$\Big(12 \text{ è un multiplo di } 6\Big) \Longrightarrow \Big(12 \text{ è un multiplo di } 3\Big),$$

$$\Big(9 \text{ è un multiplo di } 6\Big) \Longrightarrow \Big(9 \text{ è un multiplo di } 3\Big),$$

Alcuni elementi di logica

Per ottenere questo risultato è anzitutto necessario fare in modo che le affermazioni

$$\Big(12 \text{ è un multiplo di } 6\Big) \Longrightarrow \Big(12 \text{ è un multiplo di } 3\Big),$$

$$\Big(9 \text{ è un multiplo di } 6\Big) \Longrightarrow \Big(9 \text{ è un multiplo di } 3\Big),$$

$$\Big(8 \text{ è un multiplo di } 6\Big) \Longrightarrow \Big(8 \text{ è un multiplo di } 3\Big),$$

siano tutte vere.

Questa esigenza obbliga intanto alle seguenti scelte:

$\mathcal{P}$	V	V	F	F
$\mathcal{Q}$	V	F	V	F
$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$	V		V	V

Questa esigenza obbliga intanto alle seguenti scelte:

$\mathcal{P}$	V	V	F	F
$\mathcal{Q}$	V	F	V	F
$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$	V		V	V

Vogliamo anche che, se $\mathcal{P}$ è vera e anche $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ è vera, allora ne segua che $\mathcal{Q}$ è vera.

Alcuni elementi di logica

Questa esigenza obbliga intanto alle seguenti scelte:

$\mathcal{P}$	V	V	F	F
$\mathcal{Q}$	V	F	V	F
$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$	V		V	V

Vogliamo anche che, se $\mathcal{P}$ è vera e anche $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ è vera, allora ne segua che $\mathcal{Q}$ è vera.
Si impone allora questo completamento del quadro:

$\mathcal{P}$	V	V	F	F
$\mathcal{Q}$	V	F	V	F
$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$	V	F	V	V

Infine, l'ultimo modo che consideriamo è la *doppia implicazione*.

Infine, l'ultimo modo che consideriamo è la *doppia implicazione*.
Date due affermazioni $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, l'affermazione $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ ("$\mathcal{P}$ se e solo se $\mathcal{Q}$") è vera quando $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono entrambe vere o entrambe false.

Infine, l'ultimo modo che consideriamo è la *doppia implicazione*.
Date due affermazioni $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, l'affermazione $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ ("$\mathcal{P}$ se e solo se $\mathcal{Q}$") è vera quando $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono entrambe vere o entrambe false.
La tavola corrispondente è

$\mathcal{P}$	V	V	F	F
$\mathcal{Q}$	V	F	V	F
$\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$	V	F	F	V

Alcuni elementi di logica

I simboli

$$\textit{non}$$
$$\textit{e}$$
$$\textit{o}$$
$$\Longrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow$$

che abbiamo introdotto, si chiamano *connettivi logici*.

A questo punto una considerazione è opportuna.

A questo punto una considerazione è opportuna. Molto spesso le affermazioni in matematica hanno la forma $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ ($\mathcal{P}$ si chiama *ipotesi* e $\mathcal{Q}$ *tesi*).

A questo punto una considerazione è opportuna.
Molto spesso le affermazioni in matematica hanno la forma $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ ($\mathcal{P}$ si chiama *ipotesi* e $\mathcal{Q}$ *tesi*).
Se $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}$ sono tre affermazioni, si verifica con un po' di pazienza che l'affermazione

$$\big(\mathcal{P}\, e\, (\, non\, \mathcal{Q})\big) \implies \big(\mathcal{R}\, e\, (\, non\, \mathcal{R})\big)$$

ha lo stesso valore di verità di

$$\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}\,.$$

A questo punto una considerazione è opportuna.
Molto spesso le affermazioni in matematica hanno la forma $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ ($\mathcal{P}$ si chiama *ipotesi* e $\mathcal{Q}$ *tesi*).
Se $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}$ sono tre affermazioni, si verifica con un po' di pazienza che l'affermazione

$$\big(\mathcal{P}\, e(\, non\, \mathcal{Q})\big) \Longrightarrow \big(\mathcal{R}\, e(\, non\, \mathcal{R})\big)$$

ha lo stesso valore di verità di

$$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}\,.$$

Pertanto un modo per dimostrare $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ consiste nel provare che dall'ipotesi $\mathcal{P}$ e dalla negazione della tesi $\mathcal{Q}$ si ottiene una contraddizione (dimostrazione *per assurdo*).

Per chi ama la massima economia sui concetti primitivi, è possibile ricondurre tutto ad un unico connettivo, opportunamente scelto.

Per chi ama la massima economia sui concetti primitivi, è possibile ricondurre tutto ad un unico connettivo, opportunamente scelto.
Ad esempio, si può introdurre la *negazione alternativa*.

Per chi ama la massima economia sui concetti primitivi, è possibile ricondurre tutto ad un unico connettivo, opportunamente scelto.
Ad esempio, si può introdurre la *negazione alternativa*.
Se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono due affermazioni, $\mathcal{P}$ *nand* $\mathcal{Q}$ oppure $\mathcal{P} \mid \mathcal{Q}$ è l'affermazione che è falsa quando $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono entrambe vere.

Per chi ama la massima economia sui concetti primitivi, è possibile ricondurre tutto ad un unico connettivo, opportunamente scelto.
Ad esempio, si può introdurre la *negazione alternativa*.
Se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono due affermazioni, $\mathcal{P}$ *nand* $\mathcal{Q}$ oppure $\mathcal{P} \mid \mathcal{Q}$ è l'affermazione che è falsa quando $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono entrambe vere.
La tavola corrispondente è:

$\mathcal{P}$	V	V	F	F
$\mathcal{Q}$	V	F	V	F
$\mathcal{P}$ *nand* $\mathcal{Q}$	F	V	V	V

Si stabiliscono poi le seguenti abbreviazioni:

Si stabiliscono poi le seguenti abbreviazioni:

$$\begin{array}{lll}
\mathit{non}\,\mathcal{P} & \text{significa} & \mathcal{P}\ \mathit{nand}\,\mathcal{P}\,, \\
\mathcal{P}\ \mathit{e}\,\mathcal{Q} & \text{significa} & \mathit{non}\,(\mathcal{P}\ \mathit{nand}\,\mathcal{Q})\,, \\
\mathcal{P}\ \mathit{o}\,\mathcal{Q} & \text{significa} & (\,\mathit{non}\,\mathcal{P})\,\mathit{nand}\,(\,\mathit{non}\,\mathcal{Q})\,, \\
\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q} & \text{significa} & \mathcal{P}\ \mathit{nand}\,(\,\mathit{non}\,\mathcal{Q})\,, \\
\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q} & \text{significa} & (\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q})\,\mathit{e}\,(\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P})\,.
\end{array}$$

Seconda nozione fondamentale:

Seconda nozione fondamentale:
frase aperta (o *formula aperta* o *predicato*).

Seconda nozione fondamentale:
frase aperta (o *formula aperta* o *predicato*).
Generalizza quella di affermazione.

Seconda nozione fondamentale:
frase aperta (o *formula aperta* o *predicato*).
Generalizza quella di affermazione.
Una frase aperta è un'asserzione dipendente da una o più *variabili*, la cui verità dipende dai valori assunti dalle variabili stesse.

Ad esempio

$$x^2 > 4$$

è una frase aperta in una variabile, mentre

$$x^2 + y^2 < 25$$

è una frase aperta in due variabili.

Ad esempio

$$x^2 > 4$$

è una frase aperta in una variabile, mentre

$$x^2 + y^2 < 25$$

è una frase aperta in due variabili.
Nel seguito denoteremo le frasi aperte con espressioni del tipo $\mathcal{P}(x)$, $\mathcal{Q}(x, y)$, etc.

Ad esempio

$$x^2 > 4$$

è una frase aperta in una variabile, mentre

$$x^2 + y^2 < 25$$

è una frase aperta in due variabili.
Nel seguito denoteremo le frasi aperte con espressioni del tipo $\mathcal{P}(x)$, $\mathcal{Q}(x, y)$, etc.
Le affermazioni vanno concepite come frasi aperte che non dipendono da nessuna variabile.

La negazione, congiunzione, disgiunzione, implicazione e doppia implicazione di frasi aperte danno per risultato una frase aperta dipendente da tutte le variabili che compaiono.

La negazione, congiunzione, disgiunzione, implicazione e doppia implicazione di frasi aperte danno per risultato una frase aperta dipendente da tutte le variabili che compaiono.
Ad esempio

$$\mathcal{P}(x)\, e\, \mathcal{Q}(x, y)$$

è una frase aperta nelle due variabili x e y, mentre

$$\mathcal{P}(y) \Longrightarrow \mathcal{Q}(x, z)$$

è una frase aperta nelle tre variabili x, y e z.

Di importanza fondamentale sono le procedure che consentono di ottenere un'affermazione da una frase aperta.

Di importanza fondamentale sono le procedure che consentono di ottenere un'affermazione da una frase aperta.
La più semplice è la *sostituzione* delle variabili con *costanti*.

Di importanza fondamentale sono le procedure che consentono di ottenere un'affermazione da una frase aperta.
La più semplice è la *sostituzione* delle variabili con *costanti*.
Ad esempio, se $\mathcal{P}(x)$ è la frase aperta

$$x^2 > 4\,,$$

si ha che $\mathcal{P}(1)$ e $\mathcal{P}(3)$ sono due affermazioni, la prima falsa e la seconda vera.

Si possono anche considerare casi intermedi.

Si possono anche considerare casi intermedi.
Ad esempio, se $\mathcal{P}(x, y, z)$ è la frase aperta in tre variabili

$$x^2 + y^2 < z^2 \, ,$$

si ha che $\mathcal{P}(3, y, 5)$ è la frase aperta in una variabile $9 + y^2 < 25$.

La seconda (più interessante) procedura per ottenere affermazioni a partire da frasi aperte è l'applicazione del
quantificatore universale $\forall$ (*per ogni*)
e del
quantificatore esistenziale $\exists$ (*esiste*).

Alcuni elementi di logica

Se $\mathcal{P}(x)$ è una frase aperta in una variabile,

$$\forall x : \ \mathcal{P}(x)$$

è l'affermazione che significa
"la frase aperta $\mathcal{P}(x)$ è vera per ogni x".

Se $\mathcal{P}(x)$ è una frase aperta in una variabile,

$$\forall x : \ \mathcal{P}(x)$$

è l'affermazione che significa
"la frase aperta $\mathcal{P}(x)$ è vera per ogni x".
Ad esempio,

$$\forall x : \ x^2 + 1 > 0$$

è un'affermazione vera, mentre

$$\forall x : \ x > 7$$

è un'affermazione falsa.

Anche in questo caso si possono considerare situazioni intermedie:

$$\forall x : \; y^2 > 1 - x^2$$

è una frase aperta nella sola variabile y, ottenuta a partire dalla frase aperta in due variabili $y^2 > 1 - x^2$.

Per quel che riguarda il quantificatore esistenziale,

$$\exists x : \ \mathcal{P}(x)$$

è l'affermazione che significa
"la frase aperta $\mathcal{P}(x)$ è vera per almeno un x".

Una particolare attenzione va posta quando si susseguono più quantificatori di tipo diverso.

Una particolare attenzione va posta quando si susseguono più quantificatori di tipo diverso.
Ad esempio

$$\forall x,\ \exists y :\ \mathcal{P}(x, y)$$

significa che
per ogni x esiste un y per cui valga $\mathcal{P}(x, y)$.

Una particolare attenzione va posta quando si susseguono più quantificatori di tipo diverso.
Ad esempio

$$\forall x, \exists y : \ \mathcal{P}(x, y)$$

significa che
per ogni x esiste un y per cui valga $\mathcal{P}(x, y)$.
Si intende che scegliendo x diversi si trovano in generale y differenti.

Invece

$$\exists y, \forall x : \ \mathcal{P}(x, y)$$

significa che
esiste un y tale che per ogni x si abbia $\mathcal{P}(x, y)$.

Invece

$$\exists y, \forall x : \ \mathcal{P}(x, y)$$

significa che
esiste un y tale che per ogni x si abbia $\mathcal{P}(x, y)$.
In questo caso si intende che un medesimo y va bene per tutti gli x.

Alcuni elementi di logica

Consideriamo qualche esempio esplicito:

$$\forall x,\ \exists y:\ \ y > x$$

è un'affermazione vera (dato x, si scelga ad esempio $y = x + 1$).

Consideriamo qualche esempio esplicito:

$$\forall x,\ \exists y:\ \ y > x$$

è un'affermazione vera (dato x, si scelga ad esempio $y = x + 1$).
Viceversa

$$\exists y,\ \forall x:\ \ y > x$$

è un'affermazione falsa (non esiste un numero y che sia più grande di tutti i numeri).

Infine

$$\exists y, \forall x : \ x^2 + y > 5$$

è un'affermazione vera (si scelga, ad esempio, $y = 6$).

Conviene anche riflettere sulla negazione di un'affermazione contenente dei quantificatori.

Conviene anche riflettere sulla negazione di un'affermazione contenente dei quantificatori.
La negazione di

$$\forall x : \; \mathcal{P}(x)$$

è

$$\exists x : \; \; non\, \mathcal{P}(x)\,,$$

mentre la negazione di

$$\exists x : \ \mathcal{P}(x)$$

è

$$\forall x : \ \ non\,\mathcal{P}(x)\,.$$

Frase aperta in due variabili basilare:

$$x = y$$

(frase aperta di *identità*).

Frase aperta in due variabili basilare:

$$x = y$$

(frase aperta di *identità*).
La logica che abbiamo delineato, contenente frasi aperte, fra cui in posizione basilare quella di identità, e quantificatori, si chiama *logica del primo ordine con identità*.

Frase aperta in due variabili basilare:

$$x = y$$

(frase aperta di *identità*).
La logica che abbiamo delineato, contenente frasi aperte, fra cui in posizione basilare quella di identità, e quantificatori, si chiama *logica del primo ordine con identità*.
Essa costituisce il linguaggio in cui è formulata la matematica moderna.

Primi assiomi della Teoria degli insiemi

Primi assiomi della Teoria degli insiemi

Gli oggetti della teoria sono di un unico tipo e si chiamano *insiemi*.

Primi assiomi della Teoria degli insiemi

Gli oggetti della teoria sono di un unico tipo e si chiamano *insiemi*.
La teoria contiene due frasi aperte (in due variabili) primitive.
Esse sono *la frase aperta di identità*, proveniente dalla logica,

$$x = y \qquad (x \text{ è uguale ad } y)$$

e *la frase aperta di appartenenza*, tipica della teoria degli insiemi,

$$x \in X \qquad (x \text{ appartiene ad } X)\,.$$

Primi assiomi della Teoria degli insiemi

Ogni frase aperta della Matematica (e quindi, in particolare, della Teoria degli insiemi) è costruita, secondo le regole della logica, a partire da queste due frasi aperte primitive.

Primi assiomi della Teoria degli insiemi

Ogni frase aperta della Matematica (e quindi, in particolare, della Teoria degli insiemi) è costruita, secondo le regole della logica, a partire da queste due frasi aperte primitive.
Per evitare di dover maneggiare frasi aperte di volta in volta sempre più lunghe, stabiliremo all'occorrenza delle abbreviazioni.

Primi assiomi della Teoria degli insiemi

Ogni frase aperta della Matematica (e quindi, in particolare, della Teoria degli insiemi) è costruita, secondo le regole della logica, a partire da queste due frasi aperte primitive.
Per evitare di dover maneggiare frasi aperte di volta in volta sempre più lunghe, stabiliremo all'occorrenza delle abbreviazioni.
Le prime due, $x \neq y$ (x *è diverso da* y) e $x \notin X$ (x *non appartiene a* X), sono ovvie:

Primi assiomi della Teoria degli insiemi

Ogni frase aperta della Matematica (e quindi, in particolare, della Teoria degli insiemi) è costruita, secondo le regole della logica, a partire da queste due frasi aperte primitive.
Per evitare di dover maneggiare frasi aperte di volta in volta sempre più lunghe, stabiliremo all'occorrenza delle abbreviazioni.
Le prime due, $x \neq y$ (x *è diverso da* y) e $x \notin X$ (x *non appartiene a* X), sono ovvie:

$$x \neq y \qquad \text{significa} \qquad \mathit{non}\,(x = y)\,;$$
$$x \notin X \qquad \text{significa} \qquad \mathit{non}\,(x \in X)\,.$$

Un'ulteriore notazione è collegata con la nozione fondamentale di *sottoinsieme*.

Un'ulteriore notazione è collegata con la nozione fondamentale di *sottoinsieme*.
Se X ed Y sono due insiemi, diciamo che X è *sottoinsieme* di Y e scriviamo $X \subseteq Y$ (X *è incluso in* Y o X *è una parte di* Y), se ogni elemento di X è anche elemento di Y.

Primi assiomi della Teoria degli insiemi

Un'ulteriore notazione è collegata con la nozione fondamentale di *sottoinsieme*.
Se X ed Y sono due insiemi, diciamo che X è *sottoinsieme* di Y e scriviamo $X \subseteq Y$ (X *è incluso in* Y o X *è una parte di* Y), se ogni elemento di X è anche elemento di Y.
Più formalmente,

$$X \subseteq Y \quad \text{significa} \quad \forall x : \; x \in X \Longrightarrow x \in Y \, .$$

Primi assiomi della Teoria degli insiemi

Le due proprietà seguenti sono di immediata verifica.

Le due proprietà seguenti sono di immediata verifica.

(1.1) Teorema *Per ogni X, Y e Z si ha*

$$X \subseteq X\,;$$
$$(X \subseteq Y \text{ e } Y \subseteq Z) \Longrightarrow X \subseteq Z\,.$$

Le due proprietà seguenti sono di immediata verifica.

(1.1) Teorema *Per ogni X, Y e Z si ha*

$$X \subseteq X\,;$$
$$(X \subseteq Y \text{ e } Y \subseteq Z) \Longrightarrow X \subseteq Z\,.$$

Il primo assioma, che ora introduciamo, stabilisce una terza naturale proprietà dell'inclusione.

(1.2) Assioma (di estensionalità)
Per ogni X e per ogni Y si ha

$$(X \subseteq Y \text{ } e \text{ } Y \subseteq X) \Longrightarrow X = Y\,.$$

(1.2) Assioma (di estensionalità)
Per ogni X e per ogni Y si ha

$$(X \subseteq Y \text{ e } Y \subseteq X) \Longrightarrow X = Y\,.$$

L'assioma di estensionalità fornisce lo strumento principale per dimostrare che due insiemi sono uguali.

(1.2) Assioma (di estensionalità)
Per ogni X e per ogni Y si ha

$$(X \subseteq Y \text{ e } Y \subseteq X) \Longrightarrow X = Y\,.$$

L'assioma di estensionalità fornisce lo strumento principale per dimostrare che due insiemi sono uguali.
Se X ed Y sono due insiemi, per dimostrare che $X = Y$, molto spesso si prova che $X \subseteq Y$ e che $Y \subseteq X$.

Primi assiomi della Teoria degli insiemi

Il secondo assioma postula l'esistenza di un insieme con una particolare proprietà.

Il secondo assioma postula l'esistenza di un insieme con una particolare proprietà.

(1.3) Assioma (dell'insieme vuoto)
Esiste X tale che

$$\forall x : \; x \notin X \, .$$

Il secondo assioma postula l'esistenza di un insieme con una particolare proprietà.

(1.3) Assioma (dell'insieme vuoto)
Esiste X tale che

$$\forall x : \; x \notin X \, .$$

Si dimostra che l'insieme di cui all'assioma precedente è unico.

Primi assiomi della Teoria degli insiemi

Da ora in poi verrà denotato col simbolo $\emptyset$ (*insieme vuoto*) ed ha la particolarità che

$$\forall x : x \notin \emptyset \, .$$

Primi assiomi della Teoria degli insiemi

Da ora in poi verrà denotato col simbolo $\emptyset$ (*insieme vuoto*) ed ha la particolarità che

$$\forall x : \; x \notin \emptyset \, .$$

Per ogni insieme X, si ha sempre

$$\emptyset \subseteq X \, .$$

Primi assiomi della Teoria degli insiemi

I prossimi assiomi garantiscono la possibilità di costruire insiemi con particolari proprietà a partire da dati insiemi.

(1.4) Assioma (di accoppiamento)
Per ogni a e per ogni b esiste X tale che

$$\forall x : \; x \in X \iff (x = a \text{ o } x = b)\,.$$

(1.4) Assioma (di accoppiamento)
Per ogni a e per ogni b esiste X tale che

$$\forall x : \; x \in X \iff (x = a \text{ o } x = b)\,.$$

Assegnati a e b, si dimostra che l'insieme di cui all'assioma precedente è unico.

(1.4) Assioma (di accoppiamento)
Per ogni a e per ogni b esiste X tale che

$$\forall x : \ x \in X \iff (x = a \text{ o } x = b)\,.$$

Assegnati a e b, si dimostra che l'insieme di cui all'assioma precedente è unico.
Da ora in poi verrà denotato col simbolo $\{a, b\}$ ed ha la particolarità che, per ogni a, b, risulta

$$\forall x : \ x \in \{a, b\} \iff (x = a \text{ o } x = b)\,.$$

Stabiliamo anche le seguenti notazioni:

Stabiliamo anche le seguenti notazioni:

$$\begin{aligned} \{a\} &= \{a, a\}\,, \\ \{\} &= \emptyset\,. \end{aligned}$$

(1.5) Assioma (dell'unione)
Per ogni X e per ogni Y esiste Z tale che

$$\forall x : \; x \in Z \iff (x \in X \text{ o } x \in Y)\,.$$

(1.5) Assioma (dell'unione)
Per ogni X e per ogni Y esiste Z tale che

$$\forall x : \; x \in Z \iff (x \in X \text{ } o \text{ } x \in Y)\,.$$

Assegnati X e Y, si dimostra che l'insieme di cui all'assioma precedente è unico.

(1.5) Assioma (dell'unione)
Per ogni X e per ogni Y esiste Z tale che

$$\forall x : \ x \in Z \iff (x \in X \ o \ x \in Y) .$$

Assegnati X e Y, si dimostra che l'insieme di cui all'assioma precedente è unico.
Da ora in poi verrà denotato col simbolo $X \cup Y$ (*insieme-unione* di X e Y) ed ha la particolarità che, per ogni X, Y, risulta

$$\forall x : x \in X \cup Y \iff (x \in X \ o \ x \in Y) .$$

(1.6) Assioma (di specificazione)
Sia $\mathcal{P}(x)$ una frase aperta in una variabile.
Allora, per ogni insieme X, esiste un insieme Y tale che

$$\forall x : \; x \in Y \iff (x \in X \text{ e } \mathcal{P}(x)) \,.$$

(1.6) Assioma (di specificazione)
Sia $\mathcal{P}(x)$ una frase aperta in una variabile.
Allora, per ogni insieme X, esiste un insieme Y tale che

$$\forall x: \; x \in Y \iff (x \in X \text{ e } \mathcal{P}(x))\,.$$

Assegnati $\mathcal{P}(x)$ e X, si dimostra che l'insieme di cui all'assioma precedente è unico.

Primi assiomi della Teoria degli insiemi

Da ora in poi verrà denotato con la scrittura

$$\{x : \; x \in X \; e \, \mathcal{P}(x)\}$$

o, più brevemente,

$$\{x \in X : \; \mathcal{P}(x)\} \; .$$

Primi assiomi della Teoria degli insiemi

Da ora in poi verrà denotato con la scrittura

$$\{x : \; x \in X \text{ e } \mathcal{P}(x)\}$$

o, più brevemente,

$$\{x \in X : \; \mathcal{P}(x)\} \; .$$

Notazioni alternative sono anche

$$\{x | \; x \in X \text{ e } \mathcal{P}(x)\}$$

e

$$\{x \in X | \; \mathcal{P}(x)\} \; .$$

L'assioma di specificazione è forse la proprietà della teoria degli insiemi di uso più frequente.

Primi assiomi della Teoria degli insiemi

L'assioma di specificazione è forse la proprietà della teoria degli insiemi di uso più frequente.
Se si vuole costruire un insieme Y costituito esattamente da certi elementi, è sufficiente costruire un insieme X contenente tali elementi.

L'assioma di specificazione è forse la proprietà della teoria degli insiemi di uso più frequente.
Se si vuole costruire un insieme Y costituito esattamente da certi elementi, è sufficiente costruire un insieme X contenente tali elementi.
Il principio di specificazione consente poi di "ritagliare" la parte di X che interessa.

Primi assiomi della Teoria degli insiemi

Introduciamo le seguenti notazioni:

$$X \cap Y = \{x \in X \cup Y : \; x \in X \text{ e } x \in Y\},$$
$$X \setminus Y = \{x \in X : \; x \notin Y\}.$$

Primi assiomi della Teoria degli insiemi

Introduciamo le seguenti notazioni:

$$X \cap Y = \{x \in X \cup Y : \; x \in X \text{ e } x \in Y\},$$
$$X \setminus Y = \{x \in X : \; x \notin Y\}.$$

Si verifica facilmente che

$$\forall x : \; x \in X \cap Y \iff (x \in X \text{ e } x \in Y),$$

$$\forall x : \; x \in X \setminus Y \iff (x \in X \text{ e } x \notin Y).$$

Introduciamo anche delle abbreviazioni nella scrittura delle frasi aperte:

Primi assiomi della Teoria degli insiemi

Introduciamo anche delle abbreviazioni nella scrittura delle frasi aperte:

$\forall x \in X: \ \mathcal{P}(x)$ significa

$$\forall x: \ (x \in X) \Longrightarrow \mathcal{P}(x);$$

$\exists x \in X: \ \mathcal{P}(x)$ significa

$$\exists x: \ (x \in X) \ e \ \mathcal{P}(x).$$

Coppie ordinate, relazioni e funzioni

(1.1) Definizione *Per ogni x ed y poniamo*

$$(x, y) = \big\{\{x\}, \{x, y\}\big\}\,.$$

(1.1) Definizione *Per ogni x ed y poniamo*

$$(x, y) = \big\{\{x\}, \{x, y\}\big\}\,.$$

L'insieme (x, y) si chiama coppia ordinata*.*

(1.1) Definizione *Per ogni x ed y poniamo*

$$(x, y) = \big\{\{x\}, \{x, y\}\big\}\,.$$

L'insieme (x, y) si chiama coppia ordinata*.*

La nozione di coppia ordinata è importante a causa della seguente proprietà fondamentale.

(1.1) Definizione *Per ogni x ed y poniamo*

$$(x, y) = \big\{\{x\}, \{x, y\}\big\}\,.$$

L'insieme (x, y) si chiama coppia ordinata*.*

La nozione di coppia ordinata è importante a causa della seguente proprietà fondamentale.

(1.2) Teorema *Per ogni a, b, x, y si ha*

$$(a, b) = (x, y) \iff (a = x \,\mathrm{e}\, b = y)\,.$$

Dati due insiemi X ed Y, vogliamo costruire un insieme che abbia per elementi tutte e sole le coppie ordinate (x, y) con $x \in X$ ed $y \in Y$.

Dati due insiemi X ed Y, vogliamo costruire un insieme che abbia per elementi tutte e sole le coppie ordinate (x, y) con $x \in X$ ed $y \in Y$.

(1.3) Teorema *Se X ed Y sono due insiemi, esiste uno ed un solo insieme Z tale che*

$$\forall z: \; z \in Z \iff \left(\exists x \in X, \exists y \in Y : \; z = (x, y)\right) .$$

Dati due insiemi X ed Y, vogliamo costruire un insieme che abbia per elementi tutte e sole le coppie ordinate (x, y) con $x \in X$ ed $y \in Y$.

(1.3) Teorema *Se X ed Y sono due insiemi, esiste uno ed un solo insieme Z tale che*

$$\forall z : \; z \in Z \iff \\ (\exists x \in X, \exists y \in Y : \; z = (x, y)) \,.$$

Nel seguito l'insieme definito dal teorema precedente verrà denotato col simbolo $X \times Y$ (*insieme-prodotto* di X ed Y).

(1.4) Definizione *Un insieme R si dice* relazione, *se tutti i suoi elementi sono coppie ordinate.*
Formalmente, R si dice relazione, *se*

$$\forall z : z \in R \implies \big(\exists x, \exists y : z = (x, y)\big) .$$

(1.4) Definizione *Un insieme R si dice* relazione, *se tutti i suoi elementi sono coppie ordinate. Formalmente, R si dice* relazione, *se*

$$\forall z : z \in R \implies \left(\exists x, \exists y : z = (x, y)\right) .$$

Se R è una relazione, la notazione xRy (x è nella relazione R con y*) significa $(x, y) \in R$.*

(1.4) Definizione *Un insieme R si dice* relazione, *se tutti i suoi elementi sono coppie ordinate. Formalmente, R si dice* relazione, *se*

$$\forall z : z \in R \implies \big(\exists x, \exists y : z = (x, y)\big) .$$

Se R è una relazione, la notazione xRy (x è nella relazione R con y*) significa $(x, y) \in R$.*

Osserviamo che non si richiede a x ed y di appartenere a qualche prefissato insieme.

(1.5) Teorema *Sia R una relazione. Allora esiste uno ed un solo insieme X tale che*

$$\forall x : x \in X \iff (\exists y : xRy)$$

(1.5) Teorema *Sia R una relazione. Allora esiste uno ed un solo insieme X tale che*

$$\forall x : x \in X \iff (\exists y : xRy)$$

ed esiste uno ed un solo insieme Y tale che

$$\forall y : y \in Y \iff (\exists x : xRy) .$$

(1.5) Teorema *Sia R una relazione. Allora esiste uno ed un solo insieme X tale che*

$$\forall x : x \in X \iff (\exists y : xRy)$$

ed esiste uno ed un solo insieme Y tale che

$$\forall y : y \in Y \iff (\exists x : xRy)\,.$$

Nel seguito i due insiemi definiti dal teorema precedente verranno denotati rispettivamente col simbolo $\mathrm{dom}\,(R)$ (*dominio di R*) e col simbolo $\mathrm{img}\,(R)$ (*immagine di R*).

(1.6) Proposizione *Se R e S sono due relazioni e X è un insieme, gli insiemi*

(1.6) Proposizione *Se R e S sono due relazioni e X è un insieme, gli insiemi*

$$S \circ R = \Big\{(x, z) \in (\mathrm{dom}\,(R)) \times (\mathrm{img}\,(S)) : \\ \big(\exists y : \, xRy \text{ e } ySz\big)\Big\},$$

(1.6) Proposizione *Se R e S sono due relazioni e X è un insieme, gli insiemi*

$$S \circ R = \Big\{(x, z) \in (\mathrm{dom}\,(R)) \times (\mathrm{img}\,(S)) : \\ \left(\exists y : \, xRy \text{ e } ySz\right) \Big\},$$

$$R^{-1} = \Big\{(y, x) \in (\mathrm{img}\,(R)) \times (\mathrm{dom}\,(R)) : \\ xRy \Big\},$$

(1.6) Proposizione *Se R e S sono due relazioni e X è un insieme, gli insiemi*

$$S \circ R = \Big\{(x,z) \in (\mathrm{dom}\,(R)) \times (\mathrm{img}\,(S)) : \big(\exists y : \; xRy \;\mathrm{e}\; ySz\big)\Big\},$$

$$R^{-1} = \Big\{(y,x) \in (\mathrm{img}\,(R)) \times (\mathrm{dom}\,(R)) : xRy\Big\},$$

$$R\big|_X = \{(x,y) \in R : \; x \in X\}$$

sono delle relazioni.

(1.7) Definizione *La relazione* $S \circ R$ *si chiama* composizione *di* R *e* S*.*

(1.7) Definizione *La relazione* $S \circ R$ *si chiama* composizione *di* R *e* S.
La relazione R^{-1} *si chiama* relazione inversa *di* R.

(1.7) Definizione *La relazione* $S \circ R$ *si chiama* composizione *di* R *e* S.
La relazione R^{-1} *si chiama* relazione inversa *di* R.
La relazione $R\big|_X$ *si chiama* restrizione *di* R *all'insieme* X.

(1.7) Definizione *La relazione* $S \circ R$ *si chiama* composizione *di* R *e* S*.*
La relazione R^{-1} *si chiama* relazione inversa *di* R*.*
La relazione $R\big|_X$ *si chiama* restrizione *di* R *all'insieme* X*.*

Consideriamo ora un tipo particolare di relazione.

(1.8) Definizione *Una* funzione *(o applicazione) è una relazione f tale che*

$$\forall x, \forall y, \forall z : \; (xfy \, \mathrm{e} \, xfz) \implies y = z \, .$$

(1.8) Definizione *Una* funzione *(o applicazione) è una relazione f tale che*

$$\forall x, \forall y, \forall z : \; (xfy \, \mathrm{e} \, xfz) \implies y = z \, .$$

Se f è una funzione e $x \in \mathrm{dom}\,(f)$, si denota con $f(x)$ oppure f_x l'unico y tale che xfy.

Intuitivamente, f può essere concepita come una "legge" che ad ogni elemento di $\mathrm{dom}\,(f)$ associa uno ed un solo valore $f(x)$. In omaggio a questo punto di vista, si usa spesso la notazione

$$\{x \mapsto f(x)\}$$

per denotare la funzione f, mentre l'insieme f viene chiamato *grafico* della funzione.

Nella teoria formale degli insiemi la funzione viene identificata col suo grafico. Questo consente di trattare la funzione come un qualunque insieme, senza introdurre un'entità di natura diversa.

(1.9) Teorema *Se f e g sono due funzioni e X è un insieme, le relazioni $g \circ f$ e $f\big|_X$ sono delle funzioni.*

(1.9) Teorema *Se f e g sono due funzioni e X è un insieme, le relazioni $g \circ f$ e $f\big|_X$ sono delle funzioni.*

(1.10) Definizione *Una funzione f si dice* iniettiva, *se*

$$\forall x_1, \forall x_2, \forall y : \ (x_1 f y \,\mathrm{e}\, x_2 f y) \Longrightarrow x_1 = x_2 \,.$$

(1.11) Teorema *Una funzione f è iniettiva se e solo se la relazione f^{-1} è una funzione.*

(1.12) Definizione *Siano X ed Y due insiemi e sia f una funzione.*

(1.12) Definizione *Siano X ed Y due insiemi e sia f una funzione.*
Diciamo che f è una funzione da X in Y *(e scriviamo $f : X \to Y$), se* $\mathrm{dom}\,(f) = X$ *ed* $\mathrm{img}\,(f) \subseteq Y$.

(1.12) Definizione *Siano X ed Y due insiemi e sia f una funzione.*
Diciamo che f è una funzione da X in Y *(e scriviamo $f : X \to Y$), se* $\mathrm{dom}\,(f) = X$ *ed* $\mathrm{img}\,(f) \subseteq Y$.
In tal caso diciamo che Y è il codominio *di* $f : X \to Y$.

(1.12) Definizione *Siano X ed Y due insiemi e sia f una funzione.*
Diciamo che f è una funzione da X in Y *(e scriviamo $f : X \to Y$), se* $\mathrm{dom}\,(f) = X$ *ed* $\mathrm{img}\,(f) \subseteq Y$.
In tal caso diciamo che Y è il codominio *di* $f : X \to Y$.

(1.13) Definizione *Una funzione $f : X \to Y$ si dice* suriettiva, *se* $\mathrm{img}\,(f) = Y$.

(1.12) Definizione *Siano X ed Y due insiemi e sia f una funzione.*
Diciamo che f è una funzione da X in Y *(e scriviamo $f : X \to Y$), se* $\operatorname{dom}(f) = X$ *ed* $\operatorname{img}(f) \subseteq Y$*.*
In tal caso diciamo che Y è il codominio *di* $f : X \to Y$*.*

(1.13) Definizione *Una funzione $f : X \to Y$ si dice* suriettiva, *se* $\operatorname{img}(f) = Y$*.*
Si dice biiettiva, *se f è iniettiva e suriettiva.*

I numeri naturali

I numeri naturali

Stabiliamo la seguente notazione:

$$X^+ = X \cup \{X\}\,.$$

Stabiliamo la seguente notazione:

$$X^+ = X \cup \{X\}\,.$$

L'insieme X^+ si chiama *successore* di X.

Stabiliamo la seguente notazione:

$$X^{+} = X \cup \{X\}\,.$$

L'insieme X^{+} si chiama *successore* di X.
Si verifica facilmente che

$$\forall x : \; x \in X^{+} \iff (x \in X \; o \; x = X)\,.$$

I numeri naturali

Poniamo anche

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset\,, \\ 1 &= 0^+\,, \\ 2 &= 1^+\,, \\ 3 &= 2^+\,. \end{aligned}$$

I numeri naturali

Risulta anzitutto

$$
\begin{aligned}
&0 = \emptyset = \{\}\,,\\
&1 = 0 \cup \{0\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} = \{0\} = \{\{\}\}\,,
\end{aligned}
$$

I numeri naturali

Risulta anzitutto

$$\begin{aligned}
&0 = \emptyset = \{\}\,, \\
&1 = 0 \cup \{0\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} = \{0\} = \{\{\}\}\,,
\end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}
2 &= 1 \cup \{1\} = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\{\}, \{\{\}\}\}\,, \\
3 &= 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}, \emptyset\}\} = \\
&\qquad = \{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\{\}\}, \{\}\}\}\,.
\end{aligned}$$

(1.1) Assioma (di infinità) *Esiste un insieme X tale che*

(1.1) Assioma (di infinità) *Esiste un insieme X tale che*

$$\emptyset \in X\,; \tag{1.2}$$

(1.1) Assioma (di infinità) *Esiste un insieme X tale che*

$$\emptyset \in X\,; \tag{1.2}$$

$$\forall x:\ x \in X \implies x^+ \in X\,. \tag{1.3}$$

I numeri naturali

(1.1) Assioma (di infinità) *Esiste un insieme X tale che*

$$\emptyset \in X\,; \tag{1.2}$$

$$\forall x:\ x \in X \implies x^+ \in X\,. \tag{1.3}$$

(1.4) Teorema *Esiste uno ed un solo insieme ω con le seguenti proprietà:*

(1.1) Assioma (di infinità) *Esiste un insieme X tale che*

$$\emptyset \in X\,; \tag{1.2}$$

$$\forall x: \; x \in X \implies x^+ \in X\,. \tag{1.3}$$

(1.4) Teorema *Esiste uno ed un solo insieme ω con le seguenti proprietà:*

(a) *ω soddisfa la* (1.2) *e la* (1.3)*;*

(1.1) Assioma (di infinità) *Esiste un insieme X tale che*

$$\emptyset \in X\,; \tag{1.2}$$

$$\forall x:\ x \in X \implies x^+ \in X\,. \tag{1.3}$$

(1.4) Teorema *Esiste uno ed un solo insieme ω con le seguenti proprietà:*

(a) *ω soddisfa la* (1.2) *e la* (1.3)*;*

(b) *se Y è un insieme che soddisfa la* (1.2) *e la* (1.3)*, si ha $\omega \subseteq Y$.*

(1.5) Definizione *L'insieme* ω *introdotto nel teorema precedente si chiama* insieme dei cardinali finiti *e gli elementi di* ω *si chiamano* cardinali finiti*.*

(1.5) Definizione *L'insieme ω introdotto nel teorema precedente si chiama* insieme dei cardinali finiti *e gli elementi di ω si chiamano* cardinali finiti*.*

Definiamo una funzione $\sigma : \omega \to \omega$ ponendo $\sigma(n) = n^+$ ossia, più formalmente,

$$\sigma = \left\{(n, m) \in \omega \times \omega : \ m = n^+\right\} .$$

(1.5) Definizione *L'insieme ω introdotto nel teorema precedente si chiama* insieme dei cardinali finiti *e gli elementi di ω si chiamano* cardinali finiti*.*

Definiamo una funzione $\sigma : \omega \to \omega$ ponendo $\sigma(n) = n^+$ ossia, più formalmente,

$$\sigma = \left\{(n, m) \in \omega \times \omega : \; m = n^+\right\} .$$

L'insieme ω e la funzione σ soddisfano alcune proprietà notevoli.

(1.6) Teorema *Valgono i seguenti fatti:*

(1.6) Teorema *Valgono i seguenti fatti:*

(a) $0 \in \omega$;

(1.6) Teorema *Valgono i seguenti fatti:*

(*a*) $0 \in \omega$;

(*b*) σ *è una funzione da* ω *in* ω;

(1.6) Teorema *Valgono i seguenti fatti:*

(a) $0 \in \omega$;

(b) σ *è una funzione da* ω *in* ω;

(c) *per ogni* $n \in \omega$ *si ha* $\sigma(n) \neq 0$;

(1.6) Teorema *Valgono i seguenti fatti:*

(a) $0 \in \omega$;

(b) σ *è una funzione da* ω *in* ω;

(c) *per ogni* $n \in \omega$ *si ha* $\sigma(n) \neq 0$;

(d) *la funzione* σ *è iniettiva;*

(1.6) Teorema *Valgono i seguenti fatti:*

(a) $0 \in \omega$;

(b) *σ è una funzione da ω in ω;*

(c) *per ogni $n \in \omega$ si ha $\sigma(n) \neq 0$;*

(d) *la funzione σ è iniettiva;*

(e) *se $A \subseteq \omega$, $0 \in A$ e*
per ogni $n \in A$ risulta $\sigma(n) \in A$,

(1.6) Teorema *Valgono i seguenti fatti:*

(a) $0 \in \omega$;

(b) σ *è una funzione da* ω *in* ω;

(c) *per ogni* $n \in \omega$ *si ha* $\sigma(n) \neq 0$;

(d) *la funzione* σ *è iniettiva;*

(e) *se* $A \subseteq \omega$, $0 \in A$ *e*
per ogni $n \in A$ *risulta* $\sigma(n) \in A$,
si ha
$A = \omega$.