MathExcellence 2023

Applicazioni della Matematica alla Fisica

Alfredo Marzocchi ([1])

Versione 1.3, giugno 2021 ([2])

Università Cattolica del Sacro Cuore - Sede di Brescia

([1]) Università Cattolica del S. Cuore, Dipartimento di Matematica e Fisica, Via della Garzetta, 48 - 25133 Brescia (Italia) – `alfredo.marzocchi@unicatt.it`

([2]) Questo testo è stato scritto in LaTeX. LaTeX è il più spettacolare programma di *editing* di testo scientifico/matematico che esista. Parola o ApertoUfficio non sono nulla in confronto. Informatevi su `https://it.wikipedia.org/wiki/LaTeX`

Prologo

Questi appunti nascono dal corsetto omonimo tenuto nel giugno 2017 in occasione del Corso di Eccellenza “L’Università a Scuola/A Scuola di Università” presso l’Università Cattolica del Sacro Cuore a Brescia, e il loro scopo è quello di illustrare alcune nozioni di base in Meccanica, le quali, come spesso succede con le nozioni di base, non sono tanto elementari come si potrebbe credere. Se è vero che la Meccanica è stata capita veramente a fondo per la prima volta da Isaac Newton nel XVII secolo (e anche a lui si potrebbe fare qualche appuntino), considerando che la Geometria era ben sviluppata già 2000 anni prima, si ha un’idea di quanto non sia proprio proprio intuitiva.

Oltre a ciò, la Meccanica usa quasi “sottovoce” parecchi concetti matematici non banali, come la nozione di funzione, di continuità, la derivazione e l’integrazione, l’invarianza, che sono dei capisaldi della Matematica moderna.

Nelle prossime righe, quindi, vedremo alcuni aspetti di come questi concetti si integrano con l’esperienza a fornire uno dei modelli fisici più presenti, nonostante tutto, nella Fisica moderna ([1]).

Puegnago del Garda, giugno 2017

([1]) Più presente di quanto si pensi: infatti anche la Meccanica quantistica, che è la meccanica dei sistemi atomici, che tanto differisce nei princìpi da quella classica, poggia in realtà sulla Meccanica classica e su molti dei suoi concetti di base. Non così, invece, l’Elettromagnetismo, che è una teoria di campo, ossia nel quale l’ingrediente fondamentale è il campo, un concetto pure non facile da capire, ma che qui non abbiamo il tempo di approfondire.

1. Lucciole

Innanzitutto richiamiamo il concetto di *punto materiale.* Spesso si sente dire (o si legge) che il punto materiale è un punto geometrico dotato di massa. Su questo, in effetti, non c'è nulla di male. Poi però si sente dire ancora che questo oggetto *si muove*, il che è molto strano, perché di solito un punto materiale sta fermo, proprio perché indica la posizione di qualcosa ([2]).

A voler essere precisi, un punto materiale è un sistema meccanico (e su questo non insistiamo per non diventare subito noiosi) che *occupa in vari istanti punti geometrici diversi*, e poi è anche dotato di massa. In questo modo i punti geometrici sono le *posizioni* del punto materiale nel tempo. Quando ciò accade, noi diremo che il punto *si muove.*

Quando un punto materiale si muove, l'insieme dei punti geometrici che esso occupa si chiama *traiettoria* del punto, e queste posizioni possono essere anche ripetute, per esempio nel caso di un punto che si muova circolarmente. La traiettoria, quindi, porta *meno* informazione del movimento, perché, continuando nell'esempio, se si sa solo che la traiettoria è una circonferenza, non si sa se e quante volte essa viene percorsa, in che verso, e tante altre cose. Allo stesso modo, se un moto è rettilineo, si sa solo che la sua traiettoria è una retta, o una sua parte: non si sa nemmeno se il moto è progressivo, ossia se tutta la retta (o perlomeno una semiretta) viene percorsa.

Questo non sorprende affatto, perché nella traiettoria manca la componente "temporale". D'altro canto, se sappiamo solo che un moto avviene tra l'una e le due di pomeriggio, non sappiamo niente o quasi, e questo perché manca la componente "spaziale" del movimento.

Da questi semplici ragionamenti segue che per cogliere il movimento servono due ingredienti: l'*istante* e la *posizione.* Essi sono concetti *primitivi*, dei quali abbiamo una rappresentazione intuitiva senza bisogno che sia definita. Abbiamo così il concetto di *evento*, che si può simbolizzare con una coppia (t, P), dove t è l'istante e P la posizione. Però, se si vogliono fare delle applicazioni, occorrono degli strumenti matematici che permettano di *operare* al fine di trarre delle conclusioni o delle *previsioni*, ossia è necessario tradurre in *numeri* questi concetti. E qui cominciano i guai.

Noi conosciamo vari tipi di numeri, però abbiamo intuitivamente l'idea che essi, per rappresentare degnamente lo spazio o il tempo, debbano possedere una proprietà che potremmo chiamare *densità*: ossia, fra due qualunque numeri diversi ve ne deve essere almeno un terzo (e questo implica una proprietà di *ordinamento* dei numeri stessi, il che porta ad escludere, ad esempio, i numeri complessi). Sappiamo anche che sia i numeri razionali che quelli reali possiedono questa proprietà: i primi sono i tipici numeri "del geometra", cioè sono i soli numeri decimali (e neanche, a volte, quelli periodici). I secondi, molto più

([2]) Sarebbe come se, astraendo un po', il punto "Piazza della Loggia a Brescia" cambiasse di posizione quando un turista la cerchi: oggi è qui, domani là, e così via. Sembra più un gioco crudele dei cartoni animati che la Fisica.

difficili da afferrare, comprendono i numeri irrazionali come $\sqrt{2}$, e molti altri, e sono la gioia del matematico.

Il primo numero, forse, del quale si conosce l'irrazionalità è appunto $\sqrt{2}$, la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1 ([3]), e questo da solo crea già diversi problemi. Per esempio, osserviamo la figura 1:

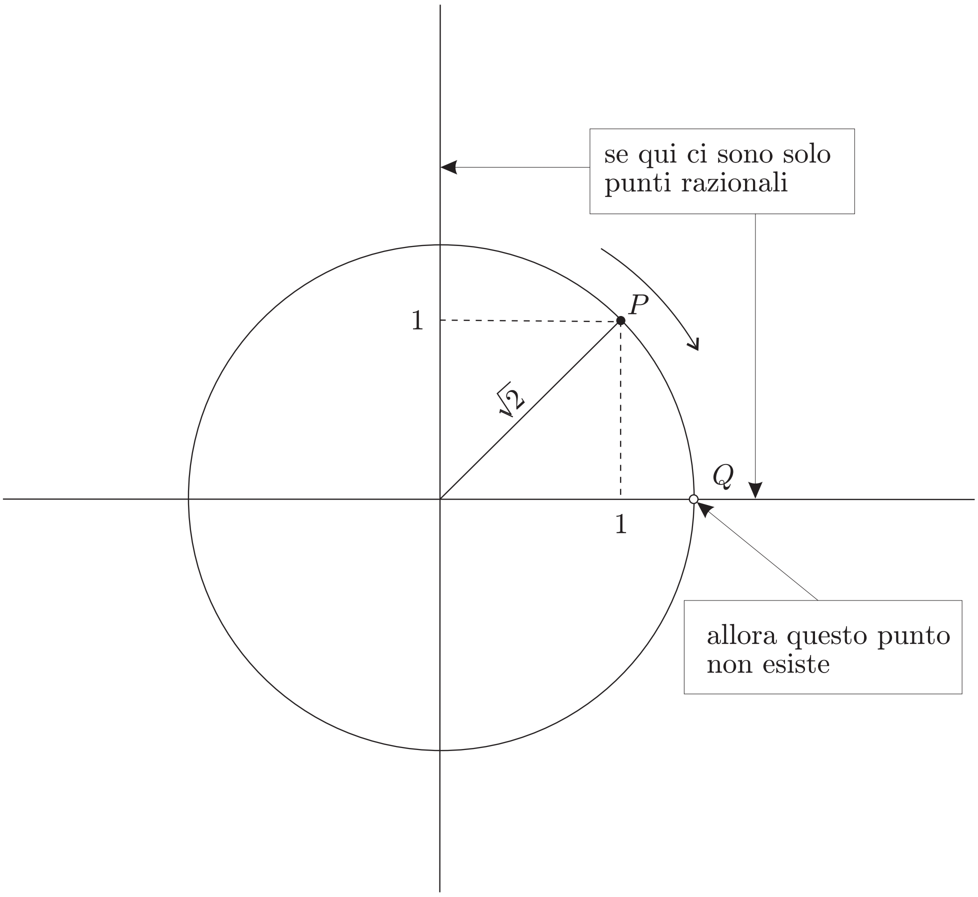


Figura 1. Stranezze delle rette contenenti solo punti razionali.

([3]) A margine, anzi in una nota, vi ricordo come si vede che $\sqrt{2}$ è irrazionale. Se per assurdo fosse razionale, esisterebbero due numeri interi m, n tali che $\sqrt{2} = m^2/n^2$, ossia

$$m^2 = 2n^2.$$

Ora, è facile convincersi che in ogni quadrato come n^2 il fattore 2 deve comparire un numero *pari* di volte nella sua decomposizione (in quanto prende due volte gli stessi fattori da n). Allora però $2n^2$ ha un numero *dispari* di fattori 2, per via del 2 davanti. Questo però è assurdo perché $2n^2$ deve essere uguale a m^2, cioè un quadrato. Pertanto $\sqrt{2}$ è irrazionale.

Questa dimostrazione si applica, tra l'altro, non solo al caso in cui vi sia il 2, ma ogni numero intero che non sia un quadrato (e che quindi ha almeno un fattore primo che compare un numero dispari di volte).

Se immaginiamo che il punto materiale, che si trovi inizialmente nella posizione P del punto nero, si muova di moto circolare uniforme in senso orario, cosicché debba prima o poi oltrepassare la retta orizzontale, allora non la intersecherebbe mai, ma in ogni caso dopo un po' si troverebbe dall'altra parte: è come se "saltasse" il punto Q.

Siamo quindi portati a preferire i numeri reali a quelli decimali per le posizioni nello spazio ([4]), e per simmetria faremo lo stesso anche per il tempo ([5]).

Per descrivere un evento serve allora una coppia (t, P) nel quale t è un numero e P un punto. Un moto quindi potrebbe essere un *insieme di coppie* (della forma (istante, posizione)).

Pensiamo a una o più lucciole: essi sono, in un certo senso, tanti eventi. Ad ogni istante osserviamo dei punti che si accendono che ci dicono dove si trova la lucciola accesa in quell'istante. In teoria è molto difficile, se non impossibile, sapere effettivamente quante lucciole stanno volando (se non si accendono troppo spesso). Una cosa però è certa: se vediamo che due lucciole sono accese in un dato istante, sappiamo che sono diverse. Allo stesso modo, se sappiamo che la lucciola è una sola, non ci aspettiamo che in un certo istante vi siano due luci accese.

FIGURA 2. Peccato che le lucciole, come tutti gli insetti, abbiano sei zampe.

([4]) In realtà, se si trattasse solo di introdurre, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$ e varie loro combinazioni, la cosa non sarebbe così difficile. In realtà, se si vuole essere sicuri che certi concetti (come quello di continuità che accenneremo più avanti) abbiano senso, serve molto di più: servono anche i cosiddetti numeri *trascendenti* (che non si possono rappresentare con radici quadrate e neanche n-esime), che sono molti molti di più.

([5]) Questo è un passaggio ben più duro da digerire. Quando guardiamo un film, davanti ai nostri occhi scorrono 24 fotogrammi al secondo: se ne inseriamo in mezzo uno in più, molto probabilmente non lo vedremmo. Dunque con gli occhi non possiamo distinguere cose accadute a distanza di meno di 1/24 di secondo. Eppure, anche per il tempo si preferisce usare i numeri reali. Questo viene sostanzialmente dalla corrispondenza con le posizioni che si realizza nella legge oraria, che vedremo fra un attimo.

Traduciamo questo con le nostre coppie: quello che *non* vogliamo, se il punto (o la lucciola) è uno solo (e d'ora in poi penseremo di lavorare sempre con un solo punto materiale, cioè *una sola* lucciola), che in un dato istante vi siano due posizioni diverse, ossia che nel nostro insieme di coppie non vi siano coppie del tipo (t, P) e (t, Q) con P diverso da Q.

Detto in modo ancora più astruso, se μ rappresenta l'insieme delle coppie che abbiamo detto sopra, ossia

$$\mu = \{(t, P) : t \in \mathbb{R} \text{ e } P \text{ è un punto dello spazio}\}$$

allora potremmo dire che

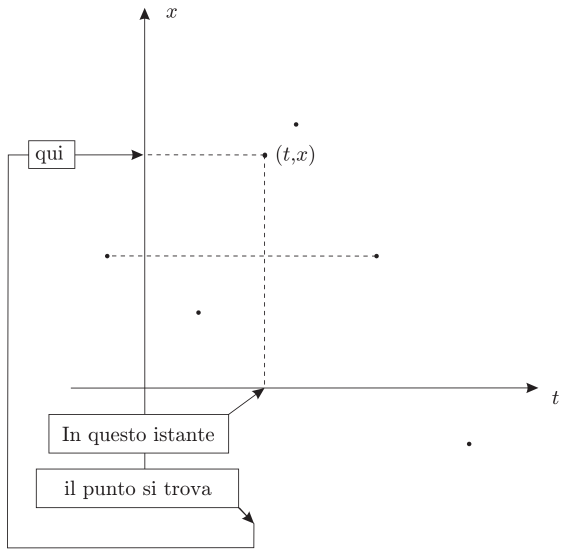
$$(t, P) \in \mu \quad \text{e} \quad (t, Q) \in \mu \quad \Rightarrow P = Q.$$

In parole, invece, più povere, se un punto occupa due posizioni, queste devono essere la stessa.

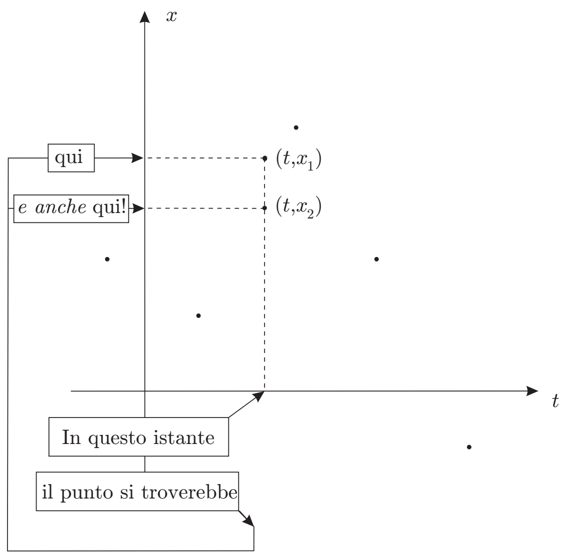
L'insieme μ di queste coppie è detto *legge oraria*, e il fatto che siano delle coppie suggerisce la loro rappresentabilità su un *grafico* (che è poi una tabella di tutte le possibili coppie, nella quale sono evidenziate tutte le coppie che effettivamente vi appartengono). In un grafico, però, i punti dello spazio si rappresentano male, perché non sono dei numeri, e allora, per semplificare le cose, facciamo l'esempio che i punti stiano su una retta orientata. In questo modo la posizione del punto sulla retta si deduce dall'ascissa x: il modulo di x indica la distanza dall'origine e la sua posizione rispetto all'origine rispetto all'orientamento (ossia, se il punto si trova prima o dopo l'origine) dal segno dell'ascissa. L'evento è quindi in questo esempio la coppia (t, x).

Ecco quindi un possibile grafico di una legge oraria (molto strano, per la verità, perché fatto di punti isolati, ma una lucciola potrebbe verificarlo) in un moto rettilineo. Abbiamo messo la t in ascissa e la x in ordinata ([6]):

([6]) e non c'è assolutamente niente di male! Non c'è scritto in nessun testo sacro che in ascissa ci vada la x e in ordinata la y, mentre è abbastanza abituale mettere in ascissa (orizzontale) la prima componente della coppia (t, x) e in ordinata (verticale) la seconda componente. Quindi i punti che vengono *prima* dell'origine sono rappresentati più in basso e quelli che seguono l'origine sono rappresentati più in alto.



ed ecco invece il grafico di qualcosa che *non* è una legge oraria:



Come possiamo vedere, a un dato istante può corrispondere una posizione al massimo, mentre è possibile che il punto passi in istanti diversi in una data posizione.

Le due quantità, istante e posizione, non sono quindi simmetriche: non si può essere in posti diversi allo stesso istante ma si può essere in istanti diversi nello stesso posto. Le variabili da esse descritte hanno avuto quindi nomi diversi (per ragioni che saranno chiare fra un attimo): la prima è detta *variabile indipendente* e la seconda *variabile dipendente.* Si dice anche poi che la variabile dipendente è l'*immagine* della variabile dipendente, per gli stessi motivi.

I matematici hanno dato il nome di *funzione* a questo tipo di oggetti (insiemi di coppie con la proprietà illustrata sopra). In realtà, è molto più facile illustrare il concetto di funzione con l'idea di "associazione", vale a dire il concetto per cui a un dato istante t si "associa" la posizione P (o x, nel nostro esempio) in quell'istante. Non volendosi poi legare a questo o quel concetto, i matematici (sempre loro) hanno usato x e y per indicare la variabile indipendente e dipendente, rispettivamente. Il nome, ovviamente, si spiega col fatto che si può scegliere autonomamente la variabile indipendente (nel nostro caso, l'istante), e la funzione "restituisce" la variabile dipendente (nel nostro caso, la posizione o la x). In realtà il primo esempio storico di funzione di un certo interesse è stato proprio la legge oraria.

Infine, per indicare la funzione, i matematici (e chi se no?), quando non sanno cos'altro mettere, usano la lettera f per la funzione (cioè l'insieme di coppie (x, y) e scrivono $y = f(x)$ per dire che la variabile x è indipendente e la variabile y è dipendente. A rigore, quindi noi dovremmo scrivere $x = \mu(t)$, ma è invalso (purtroppo) l'uso di indicare la funzione con x, cioè usare $x(t)$ ([7]). Dovremmo quindi scrivere $x = x(t)$ che non è il massimo, ma dato che di fatto non sottilizzeremo troppo, ci piegheremo, anche perché non avremo modo di usare molto spesso il simbolo della funzione.

L'insieme degli istanti ai quali corrisponde una coppia (che sono quelli per i quali si vede la lucciola) si dice *dominio* della funzione, e l'insieme delle corrispondenti posizioni si chiama *immagine.*

2. Telefoni

Una delle caratteristiche che rendono la Meccanica diversa dall'Analisi è la presenza di "osservatori". In altre parole, quando viene osservato un esperimento (per esempio, un evento), una delle richieste per la sua descrizione è la "trasmissibilità" dei risultati. Ciò dipende fortemente dal tipo di risultati: se, ad esempio, il dato osservato è una temperatura, non vi sono problemi su cosa ciò voglia dire (gradi Fahrenheit a parte) anche se la si deve comunicare al telefono qualcuno che non l'ha visto. Se dico che la temperatura odierna del lago di Garda è 24° C, sa bene cosa vuol dire anche un nostro amico a Buenos Aires: posso fare il bagno!

Un po' diversa è la situazione con il tempo. L'istante, infatti, non è "assoluto" ma necessita di un'origine. Se dico che "la partita col Brasile al Maracanã di Rio de Janeiro inizia alle 20.30" potrei avere un dubbio: saranno le 20.30 di Rio o le 20.30 di Brescia? (la cosa può essere drammaticamente diversa). Come vedete, l'informazione delle 20.30 non è sufficiente. Però, il fatto che "la partita col Brasile si è conclusa al 90°" è un'informazione assoluta: ha senso sia qui che a Rio ([8]). In altre parole, quello che è assoluto è la *durata* dell'intervallo ma non il valore dell'istante.

([7]) È assolutamente sconsigliabile usare s perché lo spazio percorso è diverso dalla posizione, anche se tutti lo usano e scrivono $s = s(t)$. Sigh.

([8]) Ed è normalmente seguita dalla domanda "OK, ma chi *ha vinto*?".

Matematicamente, le cose stanno in questi termini: il valore assoluto della *differenza* fra due istanti misurati da osservatori diversi deve essere la stessa. Se indichiamo con t_1, t_2 quelli misurati dal primo osservatore e t'_1, t'_2 quelli misurati dal secondo, si deve avere

$$|t'_2 - t'_1| = |t_2 - t_1|.$$

Come saranno legati allora t'_1 e t_1? La cosa, vedete, si fa matematica. La relazione precedente è una *isometria*, ossia una relazione che esprime la conservazione di una distanza (anche se gli istanti sono istanti, si rappresentano con numeri e li possiamo associare a punti su una retta, esattamente come abbiamo fatto con la legge oraria). Anche qui troviamo una funzione: in questo caso, essa è la funzione che associa t' a t (non importa se t_1 o t_2, sarà la stessa funzione). Quale sarà? Potrebbe trattarsi di una funzione molto semplice, per esempio di primo grado:

$$t' = f(t) = mt + q.$$

Vediamo cosa succede. Abbiamo che

$$|t'_2 - t'_1| = |f(t_2) - f(t_1)| = |m(t_2 - t_1)| = |m||t_2 - t_1|$$

e se questo valore deve coincidere con $|t_2 - t_1|$, troviamo subito $|m| = 1$, ossia $m = \pm 1$. Quindi abbiamo due possibilità:

$$f(t) = -t + q \qquad \text{e} \qquad f(t) = t + q.$$

L'invarianza della durata, però, non è l'unica richiesta che dobbiamo fare; un'altra è la cosiddetta *causalità*: essa consiste nel dire che se un istante precede un altro per un osservatore ([9]), la stessa cosa deve accadere anche per l'altro. In simboli, questo si scrive

$$t_2 > t_1 \quad \Longleftrightarrow \quad t'_2 > t'_1.$$

Vediamo allora cosa capita. Torniamo alla funzione $f(t) = mt + q$. Abbiamo

$$t'_2 - t'_1 = m(t_2 - t_1)$$

e la precedente relazione dice che $t_2 - t_1$ e $t'_2 - t'_1$ devono avere lo stesso segno. Ma allora m, che è il loro rapporto, deve essere positivo, e quindi dobbiamo scartare il caso $m = -1$. La funzione giusta è quindi

$$f(t) = t + q \ ([10])$$

e corrisponde a una *traslazione* dei tempi. Il numero q, che è $f(0)$, corrisponde quindi all'istante che il secondo osservatore misura quando per noi l'istante è quello nullo (che spesso è preso come istante iniziale).

([9]) Detto in termini calcistici, non deve succedere che per uno degli osservatori *prima* il pallone va in rete e *poi* si tira il rigore.

([10]) Si può poi dimostrare matematicamente che non possono esistere altre funzioni f che verificano la proprietà di isometria che abbiamo enunciato: abbiamo infatti tirato a indovinare prendendo $f(t) = mt+q$, ma non eravamo sicuri che non ve ne fossero altre.

Per sistemare le cose, allora, spesso si prende quello che si chiama un *riferimento*, come quello di Greenwich: se si scrive 20.30Z si indica il tempo di Greenwich, che a Rio indica le 17.30 ([11]).

Dal punto di vista dello spazio la cosa è un pochino più complicata, perché sappiamo che un punto nello spazio si individua con un vettore e non con un numero. Per il resto quello che accade è lo stesso, ma con l'aggravante che diversi osservatori osservano diversi vettori dello stesso punto, e anche qui capita però che la distanza fra due punti sia una quantità assoluta. Anche qui si può decidere di creare un *riferimento*, ossia un'origine con degli assi, e riferire tutti i punti geometrici ad esso trasformandoli in vettori, ma matematicamente la cosa è più complessa, perché osservatori ruotati vedono vettori ruotati e questo non è facile da visualizzare ([12]). Per questo motivo, lavoreremo sempre in un dato riferimento nel quale i nostri punti siano o punti geometrici, oppure individuati con i vettori che li rappresentano.

Anche qui, come accadeva per il tempo, vi è una quantità invariante: è la *distanza* fra due punti (che possono essere posizioni diverse di un punto in istanti diversi). Dal punto di vista dei vettori, se indichiamo con $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$ i due vettori che indicano la posizione del punto rispetto a un riferimento scelto, essa è $||\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1||$. Possiamo tranquillamente telefonare questa quantità al nostro amico di Buenos Aires e lui capirà, mentre se vogliamo spiegargli com'era la traiettoria e così via, allora avremo bisogno di un riferimento condiviso.

In questo caso, infine, è più difficile capire quale sia la funzione g, analoga alla f del tempo, che trasforma le posizioni $\boldsymbol{x}$ del punto per un osservatore nelle posizioni dello stesso punto per un altro osservatore, date da $\boldsymbol{x}' = g(\boldsymbol{x})$. Risulta, ma non possiamo spiegarlo qui oggi, che g è una *rototraslazione*, ossia la composizione di una rotazione e una traslazione, in simboli una funzione del tipo

$$g(\boldsymbol{x}) = \mathsf{R}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}$$

dove R indica una rotazione. In ogni caso, g rappresenta quello che in Geometria si chiama *congruenza* ([13]).

3. Matite e flash

Ma torniamo al movimento della nostra lucciola. L'esperienza ci dice che, anche se la lucciola non si vede, essa c'è e si muove sempre, non solo negli istanti in cui la vediamo. Per esempio, essa non attraversa muri o vetri, e se la illuminiamo con un faro la possiamo

([11]) Spesso si trova anche scritto GMT−3 che vuol dire tre ore prima del tempo di Greenwich.

([12]) In effetti, noi abbiamo comunque una visione dei punti dello spazio che è, grazie alla Geometria, molto più staccata dal concetto di osservatore di quanto non accada per il tempo, e quindi possiamo facilmente immaginarci un punto geometrico anche senza riferimento.

([13]) Che a volte ingenera un pericolosissimo circolo vizioso. Infatti, quand'è che due figure sono congruenti? Risposta: "quando si può sovrapporre l'una all'altra con un movimento rigido". E cos'è un movimento rigido? "Quello che porta figure congruenti in figure congruenti". Chiaramente c'è qualcosa che non va. In generale, oggi si tende a definire la congruenza in modo intuitivo, e definire il moto rigido a partire da essa.

vedere in tutti gli istanti, esattamente come fanno tutti gli altri oggetti. L'apparire e sparire è una cosa da Harry Potter, ma non si osserva in Fisica ([14]).

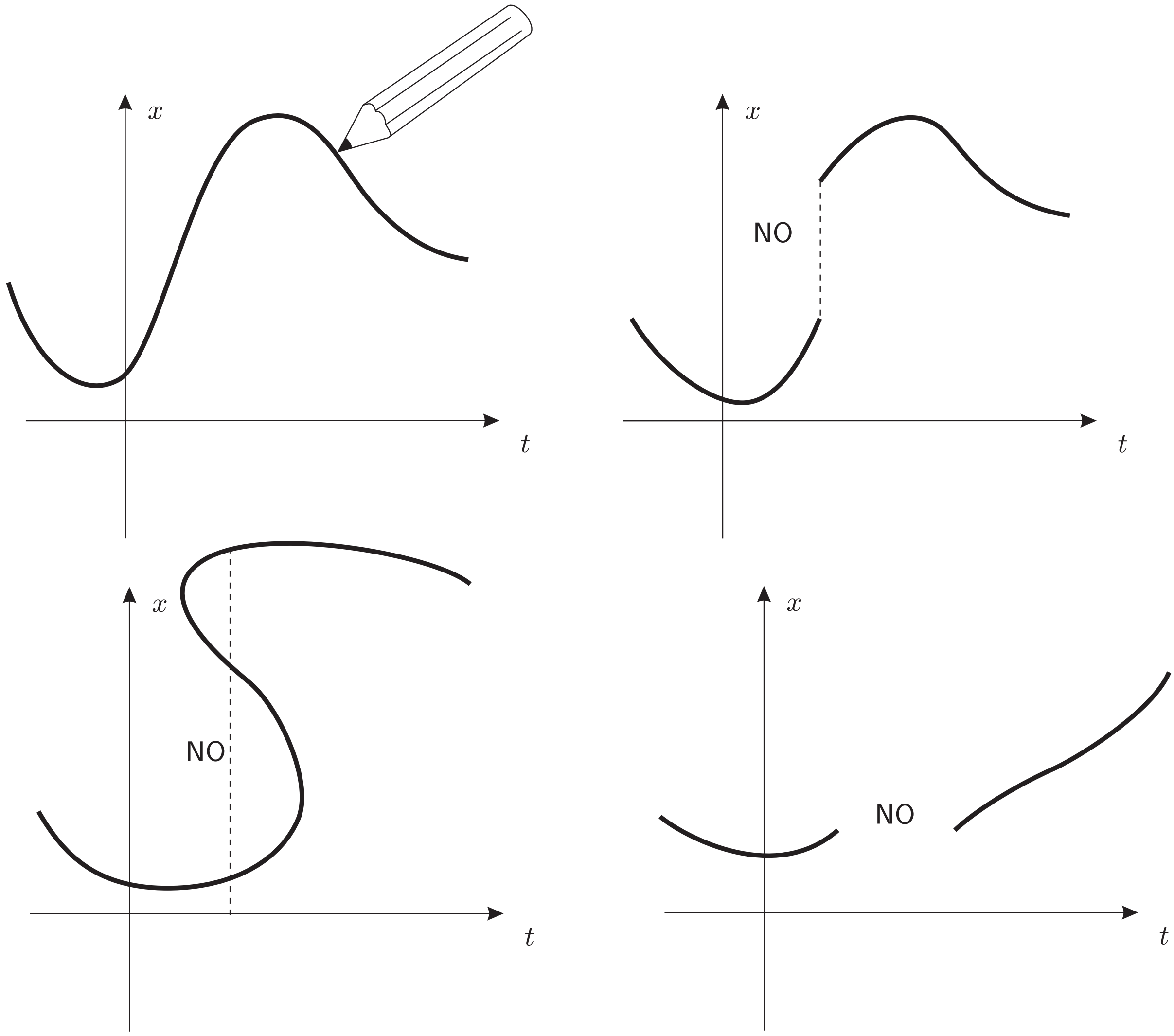
Siamo portati quindi ad ammettere due cose: primo, che se il punto materiale occupa una posizione all'istante t_1 e un'altra (eventualmente anche la stessa) all'istante t_2, allora occuperà sicuramente delle posizioni in ogni istante fra t_1 e t_2, e secondo, che la posizione non farà dei "salti" improvvisi.

La prima delle due affermazioni è chiara e ha una semplice conseguenza: l'insieme degli istanti nei quali il moto è definito è un *intervallo*, ossia un insieme di numeri reali del tipo $a < t < b$, o, come si scrive spesso, $]a, b[$ (oppure $[a, b]$ se $a \leqslant t \leqslant b$, con le ovvie varianti). Quindi *il dominio di una legge oraria è sempre un intervallo.*

La seconda affermazione è invece più complicata da chiarire matematicamente, anche se appare intuitiva. E l'intuizione è di fatto questa: se disegniamo la curva della legge oraria senza staccare la matita dal foglio (e ovviamente senza "tornare indietro" perché violeremmo la condizione di funzione), intuitivamente la posizione del punto sulla retta verticale "non farà salti" (tra l'altro, non potendo fare salti in orizzontale, volendo farli li potremmo fare solo in verticale). La figura successiva cerca di illustrare quanto vogliamo dire ([15]).

([14]) Anzi, mi pare che anche H.P. si muova senza apparire e sparire quando sta sotto il mantello dell'invisibilità, un po' come le lucciole.

([15]) Attenzione che la curva tracciata *non è* la traiettoria! Essa è una parte della retta: il moto si può "osservare" proiettando in vari istanti la curva della legge oraria sull'asse verticale, quello delle x.



Purtroppo la descrizione che viene fatta è logicamente scorretta, perché si serve del moto della matita per descrivere il moto di un punto! La cosa è ben più sottile e coinvolge un concetto non semplice.

Oltretutto, esistono curve “senza salti” (che si chiamano *continue*) che non si possono nemmeno disegnare. Una di queste, la più famosa, è la cosiddetta *curva di von Koch*. Non potendo disegnarla, si introduce per approssimazioni. La prima approssimazione è il segmento $[0, 1]$ che chiamiamo K_0. La seconda si costruisce togliendo il terzo centrale del segmento e costruendovi sopra i due lati del triangolo equilatero: si ottiene una curva (spezzata ma continua) K_1 di lunghezza $4/3$. La terza si ottiene rifacendo lo stesso procedimento su ogni segmento, e così la quarta, e così via. Osserviamo che tutte le approssimanti sono continue e che la loro lunghezza (così come la lunghezza di ogni tratto a partire da un estremo, non importa quanto piccolo) cresce all'infinito, perché ad ogni passo successivo viene moltiplicata per 4/3.

Ne segue che una matita che si muove di moto uniforme per disegnare K_0, impiegherà 4/3=1.33 secondi per disegnare K_1, poi $16/9 = 1.77$ secondi per disegnare K_1, poi $64/27 = 2.37$ secondi per K_3, ossia rallenterà sempre più.

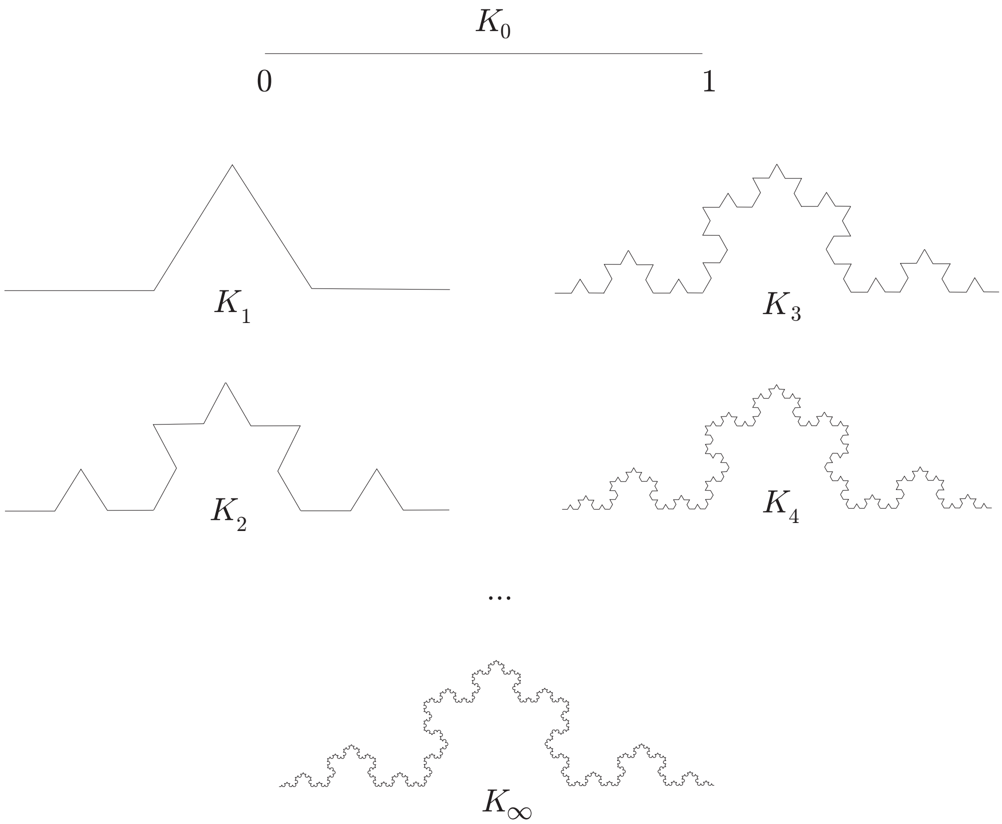


FIGURA 3. La curva di Von Koch.

Si può dimostrare che la curva "limite" che si ottiene iterando questa procedura fino all'infinito è limitata, continua, ha lunghezza infinita e addirittura *ogni suo pezzo, non importa quanto piccolo, ha lunghezza infinita* ([16])! Questa quindi non si può disegnare, perché la matita manco riuscirebbe a partire.

A parte queste diavolerie "matematitiche", l'idea è comunque chiara: se la variabile indipendente t "tende" a un valore t^*, bisogna che la posizione corrispondente $x(t)$ "tenda" alla posizione $x(t^*)$. Ma come dire che ciò accade senza richiamare il concetto di movimento, che è quello che vogliamo descrivere?

([16]) Ed è simile a tutta la curva intera!

Ci sono voluti secoli per rispondere a questa domanda. La risposta è che $|x(t) - x(t^*)|$ *può essere reso arbitrariamente piccolo a patto di prendere* $|t - t^*|$ *abbastanza piccolo* ([17]).

Naturalmente si potrebbe obiettare che "piccolo" non è un concetto matematico e va definito, e questo è quello che andiamo a definire.

Forse alcuni di voi hanno già incontrato il concetto di *successione*: tecnicamente, non è altro che una funzione dall'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ a quello $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Per esempio, $0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$ è una successione ([18]). La novità è che invece di scrivere $x(n)$ è invalso l'uso di scrivere x_n, ma questo è solo un aspetto tipografico.

Nel seguito avremo modo di fare con due tipi di successioni, quelle degli istanti, che indicheremo con (t_n) (la parentesi si riferisce al fatto che stiamo parlando dell'*intera* successione, mentre t_n indica l'n-esimo termine e basta), e quelle delle posizioni, che indicheremo con (x_n) o $(x(t_n))$. Naturalmente, *mutatis mutandis*, si può parlare di successioni (x_n) e (y_n) delle variabili indipendente e dipendente.

Definizione 3.1. *Una successione* (x_n) *si dice* infinitesima *se per ogni numero reale* $\varepsilon > 0$ *esiste un numero naturale* N *tale che per ogni* $n \geqslant N$ *si abbia* $|x_n| < \varepsilon$.

Per esempio, la successione

$$x_n = \frac{1}{n} \qquad (n \geqslant 1)$$

è infinitesima. Infatti, preso un qualunque $\varepsilon > 0$, prendiamo per N il primo intero più grande di $1/\varepsilon$. Evidentemente allora $1/N < \varepsilon$ e per ogni n ancora più grande, cioè $n \geqslant N$, si ha

$$|x_n| = \left|\frac{1}{n}\right| \leqslant \left|\frac{1}{N}\right| < \varepsilon.$$

La definizione ovviamente si estende al caso in cui si hanno istanti (tanto in ogni caso sono numeri reali) ([19]).

([17]) Non è che questo fosse il mistero che le migliori menti si siano sforzate di scoprire: il problema sta nel fatto di capire che *serviva una definizione*, non circolare. In ogni caso fu solo nel 1800 che la definizione di continuità venne data in modo chiaro. Il valore assoluto serve a non dover distinguere fra punti e istanti situati prima o dopo $x(t^*)$ o t^*.

([18]) Anche $\{3, 5, 7, \ldots\}$ lo è, ma quale sarà? In effetti, le definizioni con i puntini sono pericolose, perché non dicono esattamente come continua la successione (in quest'ultima un filomatematico avrebbe detto 11, perché 9 non è primo, mentre forse un ispettore INVALSI avrebbe preferito 9...). L'ideale è quindi una regola che definisca la successione, come $x(n) = \sqrt{n+1}$, o una regola che definisca come da un numero della successione si ricavi il successivo, come $x(n+1) = 2x(n)$, oppure ancora come da *più numeri* si ricava il successivo, come nella celebre successione di Fibonacci $x(n+2) = x(n+1) + x(n)$ (in cui $x(0) = 0$ e $x(1) = 1$).

([19]) La definizione si estende anche ai vettori: basta sostituire al modulo dei numeri il modulo dei vettori: $||\boldsymbol{x}_n||$ al posto di $|x_n|$.

Definizione 3.2. *Una successione di istanti* (t_n) *si dice che* tende *a un valore* t^* *se la successione delle differenze* $(t_n - t^*)$ *è infinitesima.*

Scriveremo $t_n \to t^*$ per dire che (t_n) tende a t^*. L'idea è quella di una serie di istanti sempre più ravvicinati che si avvicinano sempre più a t^*.

Siamo ora pronti per la definizione di continuità.

Definizione 3.3. *Una funzione* $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *si dice* continua *in un istante* t^* *(nel dominio della legge oraria) se per ogni successione* (t_n) *che tende a* t^* *si ha che la corrispondente successione* $(x(t_n))$ *tende a* $x(t^*)$*, ossia che la successione* $(x(t_n) - x(t^*))$ *è infinitesima* ([20]).

Qual è l'idea che sta dietro a questa definizione? Bisogna ritornare alle lucciole: pensate di avere un punto che non possiamo vedere sempre, ma solo quando lo illuminiamo con un flash per un istante (che sarebbe t_n). La definizione data dice allora che il moto è continuo in un dato istante se per ogni successione di flash che si avvicinano via via sempre più a t^*, le successioni delle posizioni osservate si avvicinano sempre più alla posizione in t^* ([21]).

È importante che vi sia l'*arbitrarietà* della successione (t_n) (ossia, non basta una successione particolare) ([22]): infatti, osservate questa stranissima (e non continua) legge oraria:

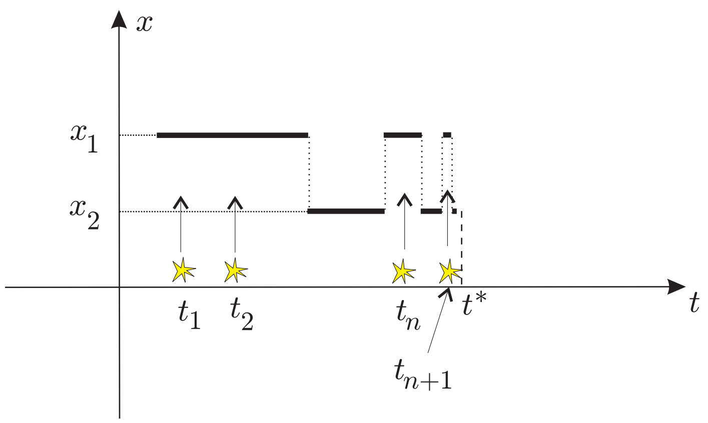


FIGURA 4. Un moto non continuo che "sfugge" a una successione di flash.

([20]) Notate che questa definizione usa solo quantità invarianti, perché sia $|t_n - t^*|$ che $|x_(t_n) - x(t^*)|$ sono invarianti per cambio di osservatore.

([21]) Un po' come si fa in discoteca con le luci stroboscopiche—solo che qui servono lampi che diventano via via più frequenti.

([22]) Qui si vede ancor meglio la necessità dell'avere numeri reali per denotare gli istanti; per esempio, tutte le successioni di istanti razionali che tendono a un valore irrazionale sarebbero escluse, e ciò non permetterebbe di definire la continuità.

essa si può definire matematicamente ([23]) e se piazziamo la successione di flash negli istanti in cui la posizione è sempre x_1 potremmo pensare che essa è continua, mentre non lo è (in altre parole, il punto potrebbe far quel che vuole negli intervalli nei quali il flash è spento). Si tratta quindi di una affermazione *teorica*, che non può essere verificata sperimentalmente: la decisione di richiedere che un moto sia continuo è un fatto fisico espresso matematicamente.

Quello che abbiamo appena visto è un controesempio cattivo, però è costruito apposta per *un* istante t^*, ma c'è di molto peggio: per esempio, la legge oraria definita da

$$x(t) = \begin{cases} x_1 & \text{se } t \text{ è razionale} \\ x_2 & \text{se } t \text{ è irrazionale} \end{cases}$$

salterebbe infinite volte con velocità infinita fra x_1 e x_2 in ogni intervallo finito di tempo ([24]).

Vediamo adesso finalmente un po' di teoremi.

Teorema 3.4. *Se una successione (t_n) è infinitesima e C è un numero reale, allora anche la successione (Ct_n), formata moltiplicando tutti i termini di (t_n) per C, è infinitesima.*

Dimostrazione. Se $C = 0$, è ovvio che (Ct_n) è infinitesima perché è la successione nulla. Allora, se $C \neq 0$, scriviamo la condizione di essere infinitesimo per (t_n) così:

$$\text{per ogni } \varepsilon' > 0 \text{ esiste } N \in \mathbb{N} \text{ tale che per ogni } n \geqslant N \text{ si abbia } |t_n| < \varepsilon'.$$

Come vedete, non è nient'altro che la definizione 3.1, scritta per (t_n) e con ε' al posto di ε, che tanto non cambia nulla perché è arbitrario.

Quello che noi dobbiamo dimostrare è che

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } N \in \mathbb{N} \text{ tale che per ogni } n \geqslant N \text{ si abbia } |Ct_n| < \varepsilon.$$

Quindi, prendiamo $\varepsilon > 0$ e poniamo $\varepsilon' = \varepsilon/|C|$. Allora, dato che (t_n) è infinitesima, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geqslant N$ si abbia

$$|t_n| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{|C|}.$$

([23]) Per esempio,

$$x(t) = \begin{cases} x_1 & \text{se } -2^{-n} \leqslant t < -2^{-n-1}, \text{con } n \text{ pari} \\ x_2 & \text{se } -2^{-n} \leqslant t < -2^{-n-1}, \text{con } n \text{ dispari.} \end{cases}$$

Qui $t^* = 0$ e gli intervalli nei quali la posizione è x_1 sono $[-1, -1/2[$, $[-1/4, -1/8[, \dots$ e quelli in cui vale x_2 sono $[-1/2, -1/4[$, $[-1/8, -1/16[, \dots$.

([24]) Se Einstein avesse visto una cosa così, gli sarebbe venuto un colpo.

Ma allora, sempre per $n \geqslant N$, si deve avere

$$|Ct_n| = |C||t_n| < |C|\frac{\varepsilon}{|C|} = \varepsilon \ (^{25})$$

che è quanto dovevamo dimostrare. ■

Teorema 3.5. *Supponiamo che (t'_n) e (t''_n) siano infinitesime. Allora anche $(t'_n + t''_n)$ e $(t'_n t''_n)$, che sono le successioni formate rispettivamente sommando e moltiplicando termine a termine le due successioni date, sono infinitesime.*

Dimostrazione. Vediamo la somma. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste $N' \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geqslant N'$ si ha

$$|t'_n| < \frac{\varepsilon}{2} \ (^{26}).$$

Allo stesso modo, dato che anche (t''_n) è infinitesima, esiste $N'' \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geqslant N''$ si ha

$$|t''_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ora, poniamo $N = \max(N', N'')$: in questo modo, se $n \geqslant N$, si avrà *sia* $n \geqslant N'$ *che* $n \geqslant N''$ ed entrambe le condizioni sono soddisfatte. Allora, per la fondamentale proprietà del valore assoluto (^{27}) troviamo

$$|t'_n + t''_n| \leqslant |t'_n| + |t''_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e quindi $(t'_n + t''_n)$ è infinitesima.

Per il prodotto è semplicissimo: basta ripetere la precedente dimostrazione con $\sqrt{\varepsilon}$ al posto di $\varepsilon/2$. ■

Siamo ora finalmente in grado di mostrare anche qualche applicazione alla Meccanica.

Teorema 3.6. *Il moto rettilineo uniforme, definito da*

$$x(t) = vt + x^*,$$

dove v e x^* sono costanti, è un moto continuo in ogni istante t^*.

(^{25}) In molti testi si "cortocircuita" il ragionamento con ε' e si scrive tranquillamente che $|t_n|$ deve essere minore di $\varepsilon/|C|$, che a prima vista sembra sbagliato perché la definizione 3.1 ha scritto ε. Il trucco sta nel fatto che ε è arbitrario e può essere $\varepsilon/|C|$, che ovviamente non è l'ε scritto un secondo prima. In realtà quello che conta è che sia strettamente positivo.

(^{26}) È lo stesso trucco di prima: ε' qui sarebbe $\varepsilon/2$.

(^{27}) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$. Non si usa *mai* (strasigh) nelle disequazioni che si fanno a scuola.

Dimostrazione. Dobbiamo vedere che se t tende a t^*, allora $x(t)$ tende a $x(t^*)$, ossia, detto altrimenti, che se $(t_n - t^*)$ è infinitesima, allora $(x(t_n) - x(t^*))$ è infinitesima.

Allora calcoliamo

$$|x(t_n) - x(t^*)| = |vt_n + x^* - (vt^* + x^*)| = |v(t_n - t^*)|.$$

Ora, noi sappiamo che $(t_n - t^*)$ è infinitesima, e dal teorema 3.4 visto sopra segue che anche $v(t_n - t^*)$ è infinitesima, e dunque lo è anche $(x(t_n) - x(t^*))$. ■

Ovviamente, se il moto è scritto nella forma $x(t) = v(t - \bar{t}) + x^*$, non cambia nulla: di fatto è come se cambiasse x^*.

Vediamo infine che il prodotto di due moti continui è un moto continuo ([28]).

Teorema 3.7. *Se due moti $x(t), y(t)$ sono continui in un certo istante t^*, anche il loro prodotto lo è.*

Dimostrazione. Basta usare l'identità

$$\begin{aligned} x(t_n)y(t_n) - x(t^*)y(t^*) &= (x(t_n) - x(t^*))(y(t_n) - y(t^*)) + \\ &\quad + x(t^*)(y(t_n) - y(t^*)) + \\ &\quad + y(t^*)(x(t_n) - x(t^*)) \end{aligned}$$

per rendersi conto che, siccome tanto $(x(t_n) - x(t^*))$ quanto $(y(t_n) - y(t^*))$ sono infinitesime, anche il loro prodotto lo è, e anche la prima moltiplicata per $x(t^*)$ e la seconda moltiplicata per $y(t^*)$. Quindi, dato che la somma di tre successioni infinitesime è ovviamente infinitesima (basta applicare due volte il teorema 3.5), risulta che la successione $(x(t_n)y(t_n) - x(t^*)y(t^*))$ è infinitesima. ■

Adesso, con quel poco che abbiamo visto, siamo già in grado di dire che *ogni legge oraria polinomiale* (ossia che si esprime come un polinomio in t) *è continua*: in particolare, il moto rettilineo uniformemente accelerato è continuo. Infatti i polinomi si ottengono tutti per somme e prodotti del moto elementare $x(t) = t$ e di una costante, e i teoremi fin qui dimostrati lo garantiscono ([29]).

([28]) Il prodotto di due moti è un ben strano moto: si misura in metri quadrati! Ma allora perché serve? Per un motivo tecnico: a noi serve dimostrare che certi moti sono continui, ed alcuni di essi si ottengono per prodotto di moti più semplici (come il moto uniforme). Un esempio è il moto rettilineo uniformemente accelerato $x(t) = (1/2)at^2$ che si può vedere come prodotto delle funzioni $t, (1/2)t$ e della costante a.

([29]) Restano fuori molte cose, comunque: funzioni goniometriche, frazionarie, irrazionali, esponenziali... be', a scuola dovrete pur fare qualcosa...☺

4. Si parte (finalmente!)...

La continuità è la richiesta "minimale" che possiamo fare sul nostro moto. Anche se la curva di Von Koch non è una legge oraria (perché non è una funzione; potrebbe essere semmai una traiettoria nel piano), con un po' di impegno si potrebbe costruire una legge oraria simile, che consiste di "infiniti urti in ogni intervallo finito di tempo", oppure una coppia di *due* leggi orarie (una per la x e una per la y) che, combinate, diano una traiettoria di questo tipo ([30]).

Se aggiungiamo qualcosa di più, possiamo parlare di velocità, che è un concetto tutt'altro che scontato.

Cosa sia la *velocità media* in un intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ è chiaro: nel caso del moto rettilineo, che abbiamo preso ad esempio, è il rapporto

$$v_m(t_0, t_1) = \frac{x(t_0) - x(t_1)}{t_0 - t_1}$$

e si estende così com'è al caso vettoriale, sostituendo i vettori posizione $\boldsymbol{x}$ al numero reale x.

La velocità media, purtroppo, dipende *da entrambi* gli istanti, iniziale e finale, e non si riferisce purtroppo ad un istante solo. Il concetto di *velocità istantanea* nasce dal desiderio di avere un'informazione, appunto, istantanea, cioè riferita ad un "momento" t. Di solito ci si chiede allora se, prendendo $t_0 - t_1$ sempre più piccolo, il rapporto dato sopra "tenda" a qualcosa: se esiste, questo qualcosa si chiamerà velocità istantanea.

La parola "tenda" ci suggerisce di procedere come sopra: potremmo fissare un istante t^*, prendere una qualunque successione (t_n) che tende a t^*, e vedere cosa succede al rapporto $(x(t_n) - x(t^*))/(t_n - t^*)$. Sembra simile a quanto abbiamo detto sopra sulla continuità, però c'è una grossa differenza.

Infatti, quando abbiamo parlato di continuità in t^*, abbiamo sempre dato per scontato che $x(t^*)$ *esistesse*, ossia che la legge oraria fosse definita in t^*. Qui le cose sono diverse, perché se poniamo $t_n = t^*$ il rapporto non esiste perché il denominatore è nullo (e anche il numeratore). Dobbiamo allora trovare un'altra strada, che coinvolge qualche nozioncina in più ancora sulle successioni.

Definizione 4.1. *Una successione infinitesima (x_n) si dice* più infinitesima *di una successione infinitesima (x'_n) se esiste una terza successione infinitesima x''_n tale che*

$$x_n = x''_n x'_n.$$

([30]) E, quasi miracolosamente, un simile oggetto (che è un frattale) potrebbe essere usato per descrivere fenomeni quali il moto Browniano, che consiste di un moto a zig-zag molto fitto di certe particelle microscopiche. Ovviamente esse *non* sperimentano infiniti urti in un tempo finito, ma la loro traiettoria assomiglia molto a curve "di tipo von Koch".

In altre parole, se (x_n) è prodotto di due successioni infinitesime, allora è più infinitesima di entrambe. Per esempio, $x_n = 1/(n \log n)$ con $n \geqslant 2$ ([31]) è più infinitesima di $x'_n = 1/n$. Infatti

$$\underbrace{\frac{1}{n \log n}}_{x_n} = \underbrace{\frac{1}{\log n}}_{x''_n} \underbrace{\frac{1}{n}}_{x'_n}$$

e, come potete constatare per esercizio, $x''_n = 1/\log n$ è infinitesima.

Torniamo alla nostra legge oraria (che supponiamo continua) e osserviamo questa espressione:

$$x(t_n) - x(t^*) - m(t_n - t^*)$$

dove m è un numero reale. Essa è evidentemente infinitesima per $t_n \to t^*$: infatti per continuità abbiamo che $x(t_n) - x(t^*)$ è infinitesima e anche $m(t_n - t^*)$ lo è per quanto visto sopra, per ogni valore di m.

Dunque il fatto di essere infinitesima non dice nulla sul valore di m. Ci chiediamo allora se esista un particolare valore v di m per cui questa espressione sia *più infinitesima* di $t_n - t^*$.

Guardiamo la figura successiva:

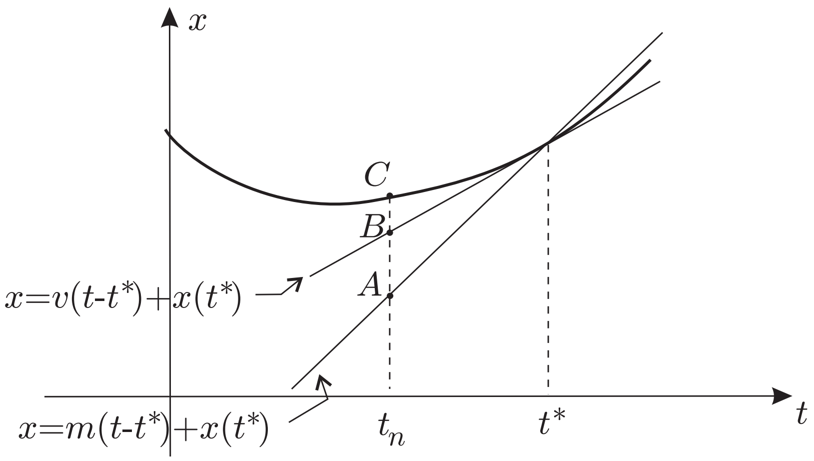


Figura 5. La retta tangente!

Si intuisce dalla figura che la lunghezza del segmento CB, che è l'espressione $x(t_n) - x(t^*) - v(t_n - t^*)$ tende a zero "più rapidamente" di quanto non faccia la corrispondente espressione per m, rappresentata dalla lunghezza del segmento CA. Questo motiva la seguente definizione.

([31]) perché $\log 1 = 0$ e la successione per $n = 1$ non avrebbe senso.

Definizione 4.2. *Data una legge oraria continua e dato un istante t^*, si definisce* velocità istantanea *del moto il numero v, se esiste, tale che per ogni successione (t_n) tendente a t^*, la quantità*

$$x(t_n) - x(t^*) - v(t_n - t^*)$$

è più infinitesima di $(t_n - t^*)$.

Se applichiamo quanto visto sopra sulle successioni più infinitesime, troviamo che deve esistere una successione infinitesima τ_n tale che

$$x(t_n) - x(t^*) - v(t_n - t^*) = \tau_n(t_n - t^*).$$

Cosa c'entra questo con la velocità istantanea? Prendiamo la formula appena scritta e dividiamo per $t_n - t^*$:

$$\frac{x(t_n) - x(t^*)}{t_n - t^*} - v = \tau_n.$$

Allora, dato che τ_n è una successione infinitesima, abbiamo reso l'idea che volevamo, ossia di mostrare che la velocità media $\frac{x(t_n)-x(t^*)}{t_n-t^*}$ "tende" a un valore v ([32]). La definizione giusta, però, non contiene denominatori.

Spesso la successione τ_n è semplicemente $t_n - t^*$. Per esempio, se $x(t) = t^2$, dall'identità

$$x(t_n) - x(t^*) = 2t^*(t_n - t^*) + (t_n - t^*)^2$$

che possiamo riscrivere così

$$\underbrace{t_n^2}_{x(t_n)} - \underbrace{t^{*2}}_{x(t^*)} - \underbrace{2t^*}_{v}(t_n - t^*) = \underbrace{(t_n - t^*)}_{\tau_n}(t_n - t^*)$$

e quindi si vede subito che la velocità nell'istante t^* è pari a $2t^*$.

Si può dimostrare che, *se esiste*, il valore v di cui sopra è unico ([33]). Questa procedura si generalizza ovviamente al caso in cui al posto di $x(t)$ c'è un vettore posizione $\boldsymbol{x}(t)$.

Se avete osservato bene la figura, vi sarete anche resi conto che quello della legge oraria non è che un esempio: avremmo potuto fare questo ragionamento per ogni funzione e trovare (se esiste) il coefficiente angolare della tangente. Nel caso delle funzioni questo valore non si chiama velocità ma *derivata* della funzione nel punto x_0. È comunque la stessa idea: si tratta di trovare la retta che "approssima meglio" la funzione nel punto dato.

([32]) In molti testi si legge ancora che la velocità è un "rapporto di infinitesimi" (che non ha senso): non è il nostro caso, anche se ovviamente l'idea soggiacente è quella.

([33]) Potrebbe darsi il caso in cui i valori di v siano diversi a seconda se t_k tende a t^* da destra oppure da sinistra. In questo caso la velocità non esiste, ma si tratta di un caso di interesse fisico, quello dell'urto: vi è una velocità istantanea "prima dell'urto" e una velocità istantanea (diversa) "dopo l'urto". Il grafico della legge oraria ha allora uno "spigolo", che viene detto in genere *punto angoloso*. La traiettoria, ovviamente, è contenuta nell'asse x.

Il valore v, visto "generato" dalla legge oraria x, si indica con $\dot{x}$ (notazione di Newton) o con dx/dt (notazione di Leibniz) ([34]). Spesso poi si immagina che t^* sia variabile (ossia di rifare per ogni istante il calcolo della velocità) e si costruisce la cosiddetta *legge oraria della velocità* (che nel linguaggio delle funzioni si chiama *funzione derivata* della funzione data).

Ora è facile dimostrare questo teorema.

Teorema 4.3. *Se una legge oraria ammette velocità istantanea in un dato istante, allora essa è anche continua in quell'istante.*

Dimostrazione. Basta osservare che

$$x(t_n) - x(t^*) = v(t_n - t^*) + \tau_n(t_n - t^*).$$

Se $t_n \to t^*$, a secondo membro c'è la somma di due successioni infinitesime, e quindi anche $(x(t^*) - x(t_n))$ è infinitesima, il che vuol dire che $(x(t_n))$ tende a $x(t^*)$. ∎

Osserviamo che il viceversa *non* è vero, ossia che se la legge oraria è solo continua, non è detto che ammetta velocità istantanea ([35]).

A questo punto è facilissimo dimostrare che

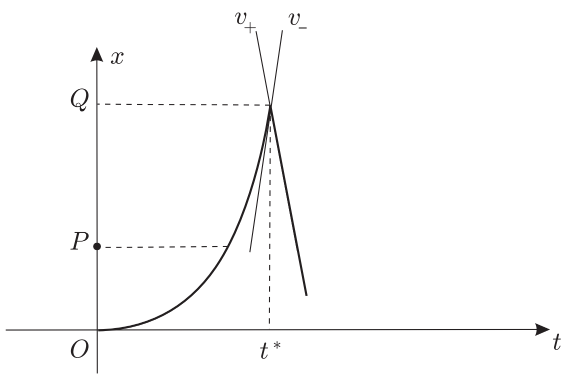


FIGURA 6. Il grafico di un urto.

Il grafico sopra è quello di un punto P (che si muove sull'asse x) di moto uniformemente accelerato da O fino a Q, arriva con velocità v_-, rimbalza e acquisisce velocità $v_+ = -v_-$, ritornando con moto uniforme (non accelerato).

([34]) Per le funzioni è oggi più comune la notazione f'. Noi, dato che siamo Meccanici, adotteremo—con un'eccezione che vedremo dopo—la notazione newtoniana.

([35]) Infatti, potrebbe avere un punto angoloso. Meno evidente è il fatto se una legge oraria continua possa non ammettere *mai* velocità istantanea. La risposta è sì, ma ci vollero circa 200 anni dopo Newton—che introdusse il concetto di velocità istantanea—perché Weierstrass trovasse nel 1872 un esempio, troppo difficile per essere mostrato qui, che però è legato ai grafici frattali come la curva di von Koch.

Teorema 4.4. *In un moto rettilineo uniforme con legge oraria*

$$x(t) = v(t - t_0) + x(t_0)$$

la velocità istantanea è pari a v in ogni istante.

Dimostrazione. Infatti, preso un qualunque istante t^* e una qualunque successione (t_n) tendente a t^*, risulta

$$x(t_n) - x(t^*) = v(t_n - t_0) + x(t_0) - (v(t^* - t_0) + x(t_0)) = v(t_n - t^*)$$

e quindi

$$x(t_n) - x(t^*) - v(t_n - t^*) = 0$$

e 0 può essere visto come $0 \cdot (t_n - t^*)$, usando la successione nulla $\tau_n = 0$ (che è ovviamente infinitesima). ■

In particolare, risulta che se il punto è fermo, ossia se $x(t)$ è costante e dunque $v = 0$, la sua velocità è nulla ([36]).

Ma come si può calcolare la velocità di un moto generico, ad esempio quello uniformemente accelerato, oppure un altro ancora? Possiamo ragionare come abbiamo fatto per la continuità: partire da espressioni semplici e, con opportune regole, costruire velocità di moti più complessi. Accenniamo a come fare per non appesantire troppo il discorso.

Intanto è facile vedere che la velocità della somma di due moti è pari alla somma delle velocità (ovviamente, nello stesso istante). Per vedere questo, basta chiamare x_1 e x_2 i due moti e costruire l'identità

$$\begin{aligned}&(x_1 + x_2)(t_n) - (x_1 + x_2)(t^*) - (v_1 + v_2)(t_n - t^*) = \\ &(x_1(t_n) - x_1(t^*) - v_1(t_n - t^*)) + (x_2(t_n) - x_2(t^*) - v_2(t_n - t^*)).\end{aligned}$$

Evidentemente, a secondo membro vi sono due espressioni più infinitesime di $t_n - t^*$, e quindi la loro somma è ovviamente ([37]) più infinitesima di $(t_n - t^*)$, e pertanto la velocità associata alla legge oraria somma $x_1 + x_2$ è la somma delle singole velocità.

Allo stesso modo, la velocità del moto con legge oraria $Cx(t)$, dove C è una costante positiva, è pari a C volte la velocità di $x(t)$, cioè $C\dot{x}(t^*)$ ([38]).

Un po' più complicata (ma non troppo) è la regola per la velocità del prodotto.

Teorema 4.5. *Date due leggi orarie x_1, x_2 che in t^* ammettono velocità rispettiamente $\dot{x}_1(t^*)$ e $\dot{x}_2(t^*)$, si ha che il prodotto x_1x_2 ammette velocità data da*

$$v = \dot{x}_1(t^*)x_2(t^*) + x_1(t^*)\dot{x}_2(t^*).$$

([36]) Non serve un corso di eccellenza per arrivare a tanto. Nel linguaggio delle funzioni, però, questo si esprime dicendo che la derivata di una costante è zero.

([37]) Dimostrate per esercizio che la somma e il prodotto di due successioni più infinitesime della *stessa* successione (x_n) è più infinitesima di (x_n).

([38]) Stessa trafila: prima si dimostra che se (t_n) è più infinitesima di (t'_n), allora anche (Ct_n) lo è, e poi si applica il tutto a $Cx(t)$. Fate anche questo per esercizio, se volete.

Pertanto, la velocità del prodotto *non* è il prodotto delle velocità ([39]): si deve invece calcolare la velocità della prima per la posizione della seconda, più la posizione della prima per la velocità della seconda.

Dimostrazione. Dobbiamo calcolare

$$x_1(t_n)x_2(t_n) - x_1(t^*)x_2(t^*) - v(t_n - t^*)$$

e cercare di trovare v in modo che questa espressione sia più infinitesima di $t_n - t^*$. Dato che noi conosciamo già il risultato, possiamo calcolare

$$x_1(t_n)x_2(t_n) - x_1(t^*)x_2(t^*) - \underbrace{[\dot{x}_1(t^*)x_2(t^*) + x_1(t^*)\dot{x}_2(t^*)]}_{v}(t_n - t^*). \tag{4.1}$$

Utilizziamo allora per i primi due addendi la stessa identità che abbiamo usato per la continuità del prodotto, ossia

$$\begin{aligned} x_1(t_n)x_2(t_n) - x_1(t^*)x_2(t^*) &= (x_1(t_n) - x_1(t^*))(x_1(t_n) - x_1(t^*)) + \\ &+ (x_1(t_n) - x_1(t^*))x_2(t^*) + \\ &+ x_1(t^*)(x_2(t_n) - x_2(t^*)) \end{aligned} \tag{4.2}$$

e, dato che i due moti ammettono velocità $\dot{x}_1(t^*)$ e $\dot{x}_2(t^*)$, sappiamo che

$$\begin{aligned} x_1(t_n) - x_1(t^*) &= \dot{x}_1(t^*)(t_n - t^*) + \tau'_n(t_n - t^*) \\ x_2(t_n) - x_2(t^*) &= \dot{x}_2(t^*)(t_n - t^*) + \tau''_n(t_n - t^*) \end{aligned}$$

dove $(\tau'_n), (\tau''_n)$ sono infinitesime.

Sostituendo allora queste espressioni nella (4.1) e disponendo di un po' di pazienza, risulta che questa espressione è pari a

$$[x_1(t^*)\tau''_n + x_2(t^*)\tau'_n](t_n - t^*) + [(\dot{x}_1(t^*) + \tau'_n)(\dot{x}_2(t^*) + \tau''_n)](t_n - t^*)^2.$$

([39]) È evidente anche da un calcolo dimensionale: il prodotto delle posizioni si misura in metri quadrati, mentre le velocità in metri al secondo. Quindi se risultasse il prodotto delle velocità, verrebbero (metri al secondo)^2, che non è una velocità.

Il primo dei due addendi ha una parentesi quadra infinitesima e quindi è più infinitesima di $t_n - t^*$, mentre il secondo è moltiplicato per $(t_n - t^*)^2$ che già di per sé è più infinitesima di $t_n - t^*$. Dunque la somma è più infinitesima di $(t_n - t^*)$ e la formula è dimostrata. ■ ([40])

Adesso siamo in grado di calcolare la velocità in ogni istante di una qualsiasi legge oraria polinomiale. Per esempio, abbiamo visto sopra che la velocità di t^2 è $2t$ (in ogni istante t—stavolta ragioniamo sulla legge oraria delle velocità e omettiamo tutti gli asterischi). Come fare la velocità di t^3? Basta applicare la formula appena visto: indicando la velocità con $D(x)$ anziché $\dot{x}$ (che confligge con le parentesi ([41])), abbiamo

$$D(t^3) = D(t^2 \cdot t) = D(t^2) \cdot t + t^2 \cdot D(t).$$

Ora $D(t^2) = 2t$ e $D(t) = 1$ perché t è un moto rettilineo uniforme con velocità 1. Dunque

$$D(t^3) = 2t^2 + t^2 = 3t^2.$$

Chiaramente, se serve t^{12} è un po' più complicato, ma ci si può arrivare ([42]). Infine, se si hanno somme di addendi si calcolano le velocità dei singoli addendi e si somma. Per esempio, se il moto è uniformemente accelerato, cioè

$$x(t) = \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + x_0$$

basta sviluppare tutto e scrivere ([43])

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 - at_0t + v_0t + \frac{1}{2}at_0^2 - v_0t_0 + x_0$$

([40]) Certo, ma come scoprirla non sapendo il risultato? Per i più curiosi, basta dividere l'identità (4.2) per $t_n - t^*$. Allora risulta

$$\begin{aligned}\frac{x_1(t_n)x_2(t_n) - x_1(t^*)x_2(t^*)}{t_n - t^*} &= \frac{(x_1(t_n) - x_1(t^*))}{t_n - t^*}(x_1(t_n) - x_1(t^*)) + \\ &+ \frac{x_1(t_n) - x_1(t^*)}{t_n - t^*}x_2(t^*) + \\ &+ x_1(t^*)\frac{x_2(t_n) - x_2(t^*)}{t_n - t^*}.\end{aligned}$$

Quando $t_n \to t^*$, a primo membro verrà la velocità del prodotto, mentre a secondo membro il primo addendo è infinitesimo perché si può dividere solo una volta per $t_n - t^*$, e gli altri due daranno, al limite, la velocità di x_1 moltiplicata per la posizione di x_2 più la posizione di x_1 moltiplicata per la velocità di x_2.

([41]) Per esempio $\dot{t}^2$ è ambiguo: viene prima il quadrato o il punto? È un'eredità del passato: se si scrivesse $Q(t)$ anziché t^2, non vi sarebbero dubbi, una cosa è $Q(D(t))$ e una cosa è $D(Q(t))$.

([42]) Viene $12t^{11}$, e in generale viene nt^{n-1} se il moto è t^n. Se qualcuno di voi conosce il Principio di induzione, questa affermazione è facile da verificare. Per $n = 1$ è vera, e se la supponiamo vera per n, la formula di sopra dice che

$$D(t^{n+1}) = D(t^n \cdot t) = D(t^n) \cdot t + t^n \cdot D(t) = (\text{qui si applica l'ipotesi}) = nt^{n-1} \cdot t + t^n = (n+1)t^n$$

che è la formula vera per $n+1$. Si può anche dimostrare che la velocità nel caso di un moto dall'espressione t^α con $\alpha \in \mathbb{R}$ segue la stessa legge, cioè $\alpha t^{\alpha-1}$.

([43]) In realtà si può trattare $t - t_0$ come se fosse t, ma imparerete anche questo a scuola...

e ottenere (osservando che a, t_0, v_0, x_0 sono tutte costanti e quindi spariscono nel calcolo della velocità)

$$v(t) = \frac{1}{2}a \cdot 2t - 2at_0 + v_0 = v_0 + a(t - t_0)$$

che è la nota espressione della legge oraria delle velocità.

5. ...e si atterra sul Sole

Passare dalla velocità all'accelerazione non è ora difficile. Dato che l'accelerazione media è data dall'espressione

$$a_m(t_0, t_1) = \frac{v(t_0) - v(t_1)}{t_0 - t_1},$$

per passare all'accelerazione istantanea si tratta di ripetere la stessa procedura illustrata sopra con la legge oraria delle velocità. In termini di funzioni, l'accelerazione istantanea è la derivata della velocità, ossia la derivata della derivata della posizione, quella che si chiama anche la *derivata seconda* della posizione.

Poiché noi sappiamo già calcolare le derivate (perlomeno quelle polinomiali), trovare le accelerazioni non è più un problema. Per esempio, se la legge oraria di un moto è data da $x(t) = t^3$, la legge oraria delle velocità sarà $v(t) = 3t^2$, e quindi quella delle accelerazioni $a(t) = 6t$. Nel caso di un moto uniformemente accelerato, invece, avevamo trovato che $v(t) = v_0 + a(t - t_0)$, e quindi l'accelerazione è costante e pari ad a, come ci aspettavamo.

Ma perché abbiamo fatto tutte queste considerazioni matematiche? In fin dei conti, tanto la velocità istantanea quanto l'accelerazione istantanea sono concetti astratti, che non si possono misurare. Perché allora sono così importanti?

La risposta sta nella Seconda Legge della Dinamica, enunciata da Newton nel 1687, e cioè che la forza impressa su un oggetto è pari alla massa per l'accelerazione *istantanea* (in un riferimento inerziale ([44])).

Fintantoché la forza è nota (come nel caso del peso, in cui è addirittura costante) il problema di determinare la legge oraria non è difficile, almeno in teoria ([45]). Sappiamo che l'accelerazione è la derivata seconda della legge oraria, e quindi se è nota l'espressione della forza nel tempo (cosa peraltro rarissima), basta cercare quella funzione che derivata due

([44]) Che è quello nel quale vale la Prima Legge della Dinamica. La prima legge—anche se Newton non l'ha detto—è quella che afferma che esiste un riferimento così fatto. Altrimenti, la prima legge sarebbe solo un caso particolare della seconda.

([45]) Nel caso nel peso, l'accelerazione è costante e pari a $-g$. Qual è la funzione che derivata due volte dà $-g$? Da quanto visto, essa è la funzione

$$-\frac{1}{2}gt^2 + vt + c$$

dove v, c sono costanti. Derivare per credere...

volte fornisce l'espressione data, per trovare la legge oraria cercata (o una delle possibili) ([46]). Per esempio, se sappiamo che la forza è proporzionale al tempo t, cioè $F(t) = kt$ dove k è una costante, allora una possibile legge oraria è $x(t) = kt^3/(6m)$, dove m è la massa . Infatti la sua derivata prima, la velocità, è $v(t) = kt^2/(2m)$, per le regole viste prima, e quindi l'accelerazione è $kt/m = F/m$ ([47]).

Nei casi della Fisica, però, le cose non vanno così semplicemente. In generale, le forze formano un *campo*, ossia in ogni punto dello spazio c'è una forza *che dipende dalla posizione del punto*. Quindi la Seconda Legge della Dinamica si scrive in generale

$$\ddot{x}(t) = F(x(t))$$

e diviene una relazione fra una funzione ($x(t)$) e la sua derivata seconda ($\ddot{x}(t)$). Questa relazione si chiama *equazione differenziale*, perché è una relazione fra funzioni che coinvolge il concetto di derivata.

Le equazioni differenziali sfidano i matematici da 350 anni, da quando Newton ha scoperto la Seconda Legge. Alcune sono facili, altre ben più difficili.

Un esempio "trattabile" è quello della legge della gravitazione universale, in cui F dipende dall'inverso del quadrato della distanza da un punto O, ma solo nel caso unidimensionale ([48]). In questo caso, se $x > 0$, la forza ha espressione

$$F(x) = -G\frac{Mm}{x^2} \; (^{49})$$

dove M è la massa che genera il campo (per esempio il Sole) e m è quella del punto in movimento ([50]). Se poniamo il tutto uguale a $m\ddot{x}$, cioè massa×accelerazione, troviamo

$$\ddot{x}(t) = -\frac{GM}{x^2(t)}.$$

([46]) Quello che spesso si chiama *integrazione*, ossia l'operazione inversa della derivata. L'integrazione è però un processo più complesso, che vedrete diffusamente a scuola.

([47]) Non è l'unica soluzione: anche

$$x(t) = \frac{k}{m}\frac{t^3}{6} + vt + c$$

dove v, c sono costanti, ha la stessa accelerazione. Infatti abbiamo sommato al moto trovato sopra un moto rettilineo uniforme che ha accelerazione nulla.

([48]) Si può fare anche nel caso tridimensionale, ma non al nostro livello di conoscenze matematiche.

([49]) Se $x < 0$, cioè se x si trova sotto l'origine, che genera il campo, la forza punta verso l'alto ed ha quindi segno positivo. Per questo motivo l'espressione corretta della forza sarebbe

$$F(x) = -\frac{x}{|x|}\frac{GM}{x^2} = -\frac{GMx}{|x|^3},$$

ma abbiamo trattato il caso $x > 0$ solo per non complicare il discorso.

([50]) In realtà entrambi i punti si muovono, ma si può dimostrare che ci si può porre in un riferimento tale che uno dei due punti sia fisso senza alterare la forma della legge: in questo caso, al posto di GMm bisogna solo sostituire $G(M+m)m$. Dato che noi stiamo facendo un esempio, non sottilizziamo troppo: è come se M fosse molto più grande di m, come spesso di fatto è, e si approssima $M+m$ con m. I puristi, invece, possono sostituire $G(M+m)$ a GM nelle formule successive.

Come facciamo a trovare soluzioni di questa equazione differenziale? Be', potremmo cercare una soluzione del tipo $x(t) = kt^\alpha$, con k e α incogniti.

Abbiamo visto dalle nostre regole (anche se non l'abbiamo dimostrato, vedi nota ([42])) che $\dot{x}(t) = \alpha t^{\alpha-1}$ e quindi

$$\ddot{x}(t) = k\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}.$$

D'altro canto, $1/x^2(t)$ vale evidentemente $1/(k^2t^{2\alpha}) = k^{-2}t^{-2\alpha}$, e quindi se scriviamo la legge di Newton troviamo

$$k\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} = -k^{-2}GMt^{-2\alpha}. \tag{5.1}$$

Se la funzione deve essere una soluzione, primo e secondo membro devono avere la stessa potenza, e quindi

$$\alpha - 2 = -2\alpha$$

da cui $\alpha = 2/3$. Se sostituiamo questo valore nella (5.1) e semplifichiamo, risulta

$$-\frac{2}{9}k = -\frac{GM}{k^2}$$

e quindi

$$k^3 = \frac{9}{2}GM$$

da cui infine

$$x(t) = \sqrt[3]{\frac{9}{2}GM}t^{2/3} = \sqrt[3]{\frac{9}{2}GMt^2}. \tag{5.2}$$

Cosa significa questa funzione? Be', se la calcoliamo, ad esempio a $t = -1$, essa vale

$$x(-1) = \sqrt[3]{\frac{9}{2}GM}.$$

Questo è dunque il moto che parte da questa posizione (positiva, dunque sopra l'origine) per $t_0 = -1$. D'altro canto, la velocità, calcolata con la regola detta sopra, vale

$$\dot{x}(t) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{9}{2}GM}t^{-1/3} = \sqrt[3]{\frac{4}{3}\frac{GM}{t}}$$

e quindi in $t_0 = -1$ essa vale

$$v(t_0) = -\sqrt[3]{\frac{4}{3}GM}.$$

Questo dice che nell'istante iniziale la velocità punta verso il basso, cioè verso l'origine. La formula (5.2) dice allora come evolverà il moto del punto partendo da quella posizione con quella velocità. Il punto tenderà quindi all'origine, che raggiungerà per $t = 0$, con velocità che tende a crescere indefinitamente (e, intuitivamente, diventerà infinita per $t = 0$). Nella prossima figura potete vedere la sua legge oraria.

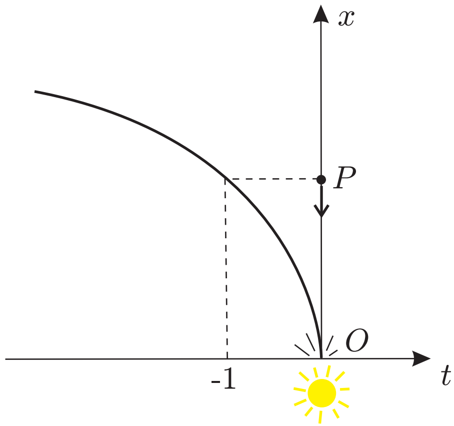


Figura 7. La legge oraria della caduta del punto sul Sole.

A questo punto, corrispondente all'istante $t = 0$, sia la forza che l'accelerazione che la velocità non sono più definite, e il modello viene meno, anche perché il punto friggerà al centro del Sole ([51]).

Epilogo

Al di là dell'esempio specifico e della sua triste conclusione, la Meccanica Celeste in particolare, e la Meccanica in generale, si è dimostrata una delle teorie in grado di offrire le previsioni più spettacolari. Per esempio, l'esistenza del pianeta Nettuno fu prevista a tavolino nel 1846 in base a discrepanze osservate dell'orbita di Urano ([52]), e il calcolo delle eclissi: la prossima eclisse totale di Sole visibile in Italia avverrà il 3 settembre 2081 alle ore 9.00Z (quindi 11.00 ora locale se nei prossimi 60 anni non cambieranno le regole dell'ora legale). Voi avrete a quella data più o meno 75 anni, e vi auguro fortissimamente di poterla vedere, di aver vissuto una bella vita e di godervi la pensione.

([51]) Secondo il modello, il Sole è un punto e non frigge un bel niente, però è chiaro che la Meccanica a questo punto deve fornire delle nuove informazioni su come proseguire: il punto potrebbe rimbalzare, continuare nello stesso senso o altro: nulla di tutto questo ci può dire l'equazione differenziale.

([52]) Pensate che ci vollero circa 25 anni di studio tra le osservazioni delle discrepanze di Urano e la scoperta di Nettuno: sembra molto, ma Urano impiega 84 anni per fare un solo giro attorno al Sole!