

**GABRIELE AMADIO - GIANCARLO CREMA**

**MODELLI DI RICERCA OPERATIVA  
APPLICATI ALLA LOGISTICA**



Pubblicazioni dell'I.S.U. Università Cattolica

BOOK

**GABRIELE AMADIO - GIANCARLO CREMA**

**MODELLI DI RICERCA OPERATIVA  
APPLICATI ALLA LOGISTICA**

Milano 1999

© 1999 I.S.U. Università Cattolica – Largo Gemelli, 1 – Milano  
<http://editoriale.cjb.net>  
ISBN 88-8311-035-8

# INDICE

<i>Prefazione</i> .....	7
-------------------------	---

**- I -**

## **TEORIA DELLE CODE**

*a cura di Gabriele Amadio*

1.1 - Presentazione .....	9
1.1.1 - La coda ed il suo processo. ....	9
1.2 - Cenni sulle Catene markoviane.....	11
1.2.1 - Definizione.....	11
1.2.2 - Le catene markoviane con variabile tempo di tipo discreto. ....	12
1.2.3 - Catene markoviane con variabile tempo di tipo continuo. ....	15
1.3 - struttura dei Modelli di code .....	15
1.3.1 - La popolazione.....	15
1.3.2 - La coda.....	17
1.3.3 - La disciplina del servizio. ....	18
1.3.4 - L'organizzazione e la struttura del punto di servizio.....	19
1.3.5 - Esempi di rappresentazione grafica dei processi di code.....	21
1.3.6 - Definizioni. ....	24
1.3.7 - Alcune considerazioni riepilogative. ....	24
1.4 - Modelli di code .....	26
1.4.1 - Il processo di nascita-morte: postulati fondamentali. ....	26
1.4.2 - Analisi del processo nascita-morte. ....	30

1.4.3 -	Le probabilità di stato nei modelli non stazionari.....	31
1.4.4 -	Un processo di sole nascite.....	34
1.4.5 -	Un processo di sole uscite.....	38
1.4.6 -	Stato stazionario del sistema di code.....	41
1.4.7 -	Analisi della distribuzione di Poisson.....	45
1.4.8 -	La distribuzione esponenziale.....	50
1.4.9 -	La distribuzione di Erlang.....	53
1.5 -	Alcuni Modelli di code .....	56
1.5.1 -	Premessa.....	56
1.5.2 -	Modello con $s=1$ , arrivi secondo Poisson e tempi di servizio esponenziali - $M/M/1$ .....	56
1.5.3 -	Modello con $s = 1$ , arrivi secondo Poisson e tempi di servizio secondo Erlang.....	65
1.5.4 -	Modello con $s = 1$ , arrivi secondo Poisson e lunghezza massima della coda limitata a $K$ - $(M/M/1/K)$ .....	67
1.5.5 -	Modello con $s=1$ e popolazione finita - $M/M/1/M$ .....	72
1.5.6 -	Modello con $s > 1$ , arrivi secondo Poisson e tempi di servizio esponenziali - $M/M/m$ .....	74
1.5.7 -	Alcune considerazioni finali sui modelli di code.....	79
1.6 -	L'applicazione dei Modelli di code nella sperimentazione .....	79
1.6.1 -	Alcune considerazioni.....	79
1.6.2 -	Un esempio concreto.....	80
1.6.3 -	Ulteriori considerazioni sull'utilizzo dei modelli di code.....	92
1.7 -	La simulazione come alternativa ai Modelli di code .....	98
1.7.1 -	Definizione.....	99
1.7.2 -	La costruzione del modello di simulazione .....	99
1.8 -	Conclusioni .....	114

**- II -**

**GESTIONE DELLE SCORTE**

*a cura di Giancarlo Crema*

2.1 – Generalità.....	117
2.2 - Requisiti dei problemi delle scorte. ....	119
2.3 - Andamento grafico delle scorte. ....	119
2.4 - Metodi di gestione delle scorte. ....	120
2.5 - Parametri economici. ....	128
2.6 - Modelli matematici per la gestione delle scorte.....	131
2.7 - Modelli deterministici statici. ....	132
2.7.1 - Modelli per approvvigionamento istantaneo. ....	132
2.7.2 - Modelli per approvvigionamento differito nel tempo. ....	151
2.7.3 - Modelli per approvvigionamento continuo nel tempo. ....	153
2.8 - Modelli deterministici dinamici.....	159
2.8.1 - Modelli per la programmazione della produzione .....	159
2.8.2 - Modelli per l'uscita delle scorte dei prodotti deteriorabili nel tempo.....	178
2.9 - Modelli probabilistici statici.....	184
2.9.1 - Modello senza costo di preparazione dei lotti. ....	189
2.9.2 - Modello con costo di preparazione dei lotti.....	200

**- III -**

**IL TRASPORTO**

*a cura di Giancarlo Crema*

3.1 - Origine del nome.....	203
3.2 - Natura del problema.....	203
3.3 - Modello matematico. ....	204
3.4 - Identificazione delle soluzioni accettabili di base.....	207
3.5 - Ricerca delle soluzioni accettabili di base iniziali. ....	208

3.6 - Ricerca della soluzione ottima. ....	217
3.7 - Casi particolari. ....	222
3.8 - Esercizio.....	224

- IV -

**L'ASSEGNAZIONE**

*a cura di Giancarlo Crema*

4.1 - Natura del problema.....	247
4.2 - Modello matematico. ....	248
4.3 - Procedura risolutiva. ....	251
4.4 - Ricerca di un massimo. ....	253
4.5 - Esercizio.....	254
 <i>Bibliografia</i> .....	 259

## PREFAZIONE

*In tempi ormai lontani il gruppo di appassionati della ricerca operativa dell'Università Cattolica del S. Cuore produsse la traduzione di un testo di Hillier e Liebermann che ben si adattava alle necessità di un corso istituzionale, appunto di Ricerca operativa, nella Facoltà di Economia e Commercio.*

*Quella traduzione ha avuto una rimarchevole fortuna editoriale, ma gli oltre vent'anni di onorato servizio oggi si avvertono nettamente.*

*L'evoluzione naturale del lavoro poteva essere la ritraduzione delle successive edizioni di un testo così fortunato: sfortunatamente, cammin facendo, quel testo nelle successive edizioni è divenuto una specie di «summa» della ricerca operativa difficilmente utilizzabile come testo di riferimento per un corso universitario.*

*Nel frattempo, l'evoluzione dei piani di studio delle facoltà economiche che hanno portato ad abbandonare la vecchia dicitura di "ricerca operativa" con espressioni più specifiche e direttamente legate alle applicazioni aziendali, ha introdotto una maggiore elasticità dei temi degni di trattazione e nel contempo ha richiesto un aggiornamento di tutta la materia.*

*Le modificazioni debbono comunque tener conto che non si può pensare di abbandonare argomenti che mantengono un elevato livello di importanza e la cui conoscenza rimane bagaglio importante di un operatore direttivo in qualsiasi tipo di azienda.*

*A queste motivazioni cerca di rispondere questa riedizione di un piccolo manuale che mantiene l'intenzione di essere da una parte*

*supporto di preparazione agli esami e dall'altra cerca di aprire qualche motivo di riflessione; tale è in particolare il cenno alla simulazione che conferma la necessità e l'augurio di programmare altri interventi nel settore.*

Antonio Liverani

# - I -

## TEORIA DELLE CODE

### 1.1 - PRESENTAZIONE

#### 1.1.1 - *La coda ed il suo processo.*

Molti di noi sicuramente si saranno più di una volta trovati nella spiacevole, o comunque poco gradita, situazione di dover sopportare delle attese prima di poter beneficiare di un servizio oppure prima di vedere soddisfatta una richiesta a suo tempo effettuata.

Lo sportello bancario, l'ufficio postale, il supermarket, il parrucchiere e molti altri sono esempi di strutture dove quasi certamente l'utente, o più in generale il richiedente il servizio, dovrà quasi certamente adattarsi a sopportare delle attese.

Ma, oltre a quelli sopra descritti, molti altri possono essere gli esempi di situazioni reali in cui l'utente viene servito dopo una più o meno lunga attesa nel sistema. Si pensi ad esempio a chi utilizza un terminale collegato in "*tempo reale*" con un centro di elaborazione dati, oppure all'impiegato che invia una pratica ad un ufficio interno della propria azienda affinché la stessa venga evasa, oppure ad un centralino di una società che deve smistare le comunicazioni in arrivo o in partenza.

In situazioni come quelle sopra descritte può assumere una certa rilevanza l'analisi del processo di code al fine anche di effettuare delle scelte sull'eventuale modifica della dimensione della struttura che deve offrire il servizio. In tale contesto ci sono comunque due tipi di interessi che si contrappongono vale a dire quelli dell'utente che non

vorrebbe sopportare delle attese e quelli della "Direzione" della struttura che offre il servizio in quanto consapevole che per ridurre i tempi di attesa si devono effettuare delle scelte onerose (aumento del personale, acquisto di macchine più efficienti, ampliamento della struttura).

L'utilizzo di modelli matematico-statistici come quelli che la *teoria delle code* ci mette a disposizione possono quindi essere dei validi strumenti a disposizione degli organi decisionali al fine di poter individuare un giusto equilibrio tra la dimensione della struttura che fornisce il servizio ed i costi da sostenere per creare il predetto dimensionamento.

Nelle pagine che seguiranno verranno quindi illustrati i principali concetti e definizioni propri della *teoria delle code* e verranno introdotti alcuni modelli fondamentali che possono essere utilizzati al fine di effettuare una concreta analisi su alcuni sistemi reali. Per ulteriori approfondimenti si rinvia il lettore alle pubblicazioni citate in bibliografia.

Resta inteso che, al fine di poter utilizzare i modelli di code per l'eventuale analisi, dovranno essere verificate ed accettate le ipotesi sulle quali gli stessi si fondano.

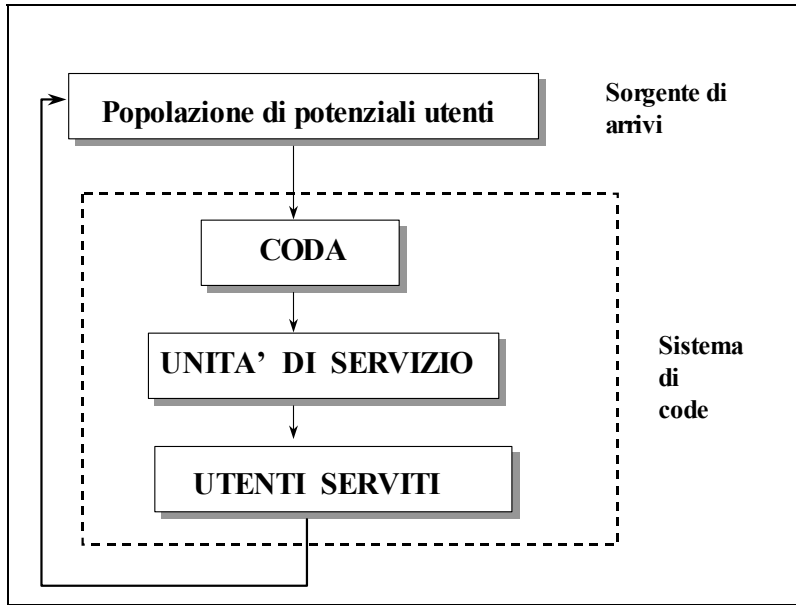
Nell'analisi di un processo di code i passi fondamentali sono quindi i seguenti:

- **analisi** del sistema e raccolta dati;
- **elaborazione** dei dati raccolti;
- **individuazione di un modello teorico** di code da utilizzare nell'analisi;
- **verifica** dell'accettabilità dei risultati forniti dal modello;
- **analisi dei risultati del modello** in presenza di valori alternativi dei parametri.

Ognuno dei passi sopraccitati verrà analizzato distintamente nel corso della presente trattazione.

Con la figura che segue viene illustrato il processo di code nei suoi aspetti fondamentali.

**Figura n. 1.1**  
*La coda ed il suo processo generale*



## 1.2 - CENNI SULLE CATENE MARKOVIANE

### 1.2.1 - *Definizione.*

Al fine di meglio comprendere i modelli di code che verranno successivamente analizzati, diventa essenziale, a questo punto, introdurre alcuni concetti fondamentali relativi alle catene Markoviane.

#### *Definizione:*

Un insieme di variabili casuali  $[X_n]$  forma una catena markoviana se la probabilità del prossimo valore di stato ( $i_n$ ) dipende solo dallo stato attuale ( $i_{n-1}$ ).

Quindi:

$$\begin{aligned}
P[X_n = i_n | X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}] &= \\
&= P[X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}]
\end{aligned}
\tag{1.2.1}$$

con **variabile tempo di tipo discreto**.

Quindi, definito  $E(j)$  come lo stato del sistema in cui la variabile casuale  $X_n$  assume il valore  $j$ ,  $P_{ij}$  rappresenta la probabilità di passare al prossimo stato  $E(j)$  partendo dallo stato attuale  $E(i)$ .

Qualora si consideri invece la **variabile tempo di tipo continuo** la definizione di catena markoviana può essere sintetizzata dalla seguente notazione:

$$\begin{aligned}
P[X(t_{n+1}) = j | X(t_1) = i_1, X(t_2) = i_2, \dots, X(t_n) = i_n] &= \\
&= P[X(t_{n+1}) = j | X(t_n) = i_n]
\end{aligned}
\tag{1.2.2}$$

### 1.2.2 - Le catene markoviane con variabile tempo di tipo discreto.

Avremo occasione di verificare come il tipico processo di code può essere ricollegato ad una struttura di catena markoviana.

Un esempio ci aiuterà a meglio illustrare l'argomento introdotto.

Consideriamo un venditore di prodotti di una società il quale decide di visitare della potenziale clientela in un certo numero di città (1,2,3,4,.....,i,j,.....z) seguendo un certo itinerario.

Supponiamo inoltre che la "direzione aziendale" abbia imposto le seguenti regole da seguire:

- il passaggio alla città successiva sarà condizionato alla raccolta sulla piazza attuale di almeno dieci ordini dalla clientela;
- il mancato raggiungimento del sopraccitato numero di ordini di acquisto comporta per il venditore la permanenza in città di un altro

giorno, fino al raggiungimento del limite minimo previsto e comunque fino alle ore 18.00 se il citato limite viene raggiunto in giornata;

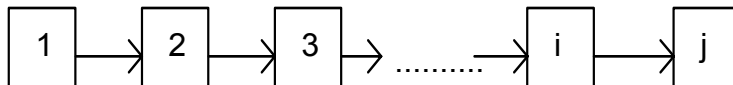
- lo spostamento da una città all'altra avviene sempre dopo le ore 18.00.

Definiamo ora con  $X_n$  la città in cui troviamo il venditore alle ore 18.00 del giorno  $n$ . Ipotizziamo inoltre che il numero di ordini che possono essere acquisiti in una città sia imprevedibile e quindi che la futura posizione del venditore possa intendersi come l'espressione di una variabile casuale.

Quando il venditore si trova nella città  $i$  e nel momento in cui ha acquisito i dieci ordini di acquisto, egli sa che automaticamente e dopo le ore 18.00, potrà lasciare la città  $i$  per andare a  $j$  (si assume irrilevante il tempo necessario per passare da una città all'altra).

L'esempio può essere anche illustrato dalla seguente figura:

*Figura n. 1.2*



Come si vede il passaggio dallo stato  $i$  allo stato  $j$  implica automaticamente che il sistema sia precedentemente passato per gli stati  $1, 2, 3, 4, 5, \dots, (i-2), (i-1)$ . Nel nostro caso, trovandoci in presenza di una catena markoviana, **la probabilità del prossimo stato del sistema** dipende sostanzialmente dalla probabilità dello stato **in cui si trova attualmente il sistema**. Si può quindi affermare che le *catene markoviane* risalgono solo allo stato o posizione precedente e dimenticano quindi tutto il resto.

Quando  $X_n = j$  (il venditore è **nella città  $j$  il giorno  $n$** ) si dice che **il sistema** si trova allo stato  $E(j)$  al tempo  $n$ .

Riprendendo l'espressione (1.2.1) notiamo come essa rappresenti la **probabilità di transizione ad un solo passo**. In particolare, nell'ipotesi in cui le probabilità di transizione siano indipendenti da  $n$ , la catena markoviana viene definita **di tipo omogeneo**. Quindi:

$$P_{ij} = P[X_n = j | X_{n-1} = i] \quad (1.2.3)$$

definisce la generica probabilità di passare al prossimo stato  $E(j)$  partendo dallo stato attuale  $E(i)$  riferita ad una **catena markoviana di tipo omogeneo**.

Può essere quindi definita a questo punto anche la probabilità di passare da uno stato all'altro del sistema **dopo  $m$  passi** considerando che detta probabilità dipende solo da  $m$  e non dal tempo attuale  $n$ .

Le seguenti espressioni definiscono quindi la probabilità di passare dallo stato  $i$  allo stato  $j$  dopo  $m$  passi:

$$P_{ij}^{(m)} = P[X_{n+m} = j | X_n = i] \quad (1.2.4)$$

$$P_{ij}^{(m)} = \sum_k P_{ik}^{(m-1)} P_{kj} \quad (1.2.5)$$

In particolare una catena markoviana viene definita **irriducibile** se ogni stato del sistema può essere raggiunto da qualsiasi altro stato e quindi:

$$P_{ij}^{(m_0)} > 0 \quad (1.2.6)$$

per qualsiasi  $i$  e  $j$  e con  $m_0$  intero e positivo.

E' una situazione, quella appena descritta, facilmente verificabile nei tipici processi di code.

### 1.2.3 - *Catene markoviane con variabile tempo di tipo continuo.*

Se si considera un elemento o un sistema in movimento che può cambiare stato in ogni momento e quindi in corrispondenza di qualsiasi punto della variabile tempo, ci troviamo in presenza di una **catena markoviana con variabile tempo di tipo continuo.**

Arriviamo quindi alla seguente definizione:

**un insieme di variabili casuali  $X(t)$  forma una catena markoviana con variabile tempo di tipo continuo se per ogni  $n$  intero e per ogni sequenza  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{(n-1)}$ , posto che  $t_1 < t_2 < \dots < t_{(n-1)}$ , si ha la (1.2.2) ossia:**

$$\begin{aligned} P[X(t_{n+1}) = j | X(t_1) = i_1, X(t_2) = i_2, \dots, X(t_n) = i_n] &= \quad (1.2.7) \\ &= P[X(t_{n+1}) = j | X(t_n) = i_n] \end{aligned}$$

Sapendo che, in ogni processo di Markov, il tempo di permanenza in un determinato *stato* del sistema gode della proprietà della *mancaanza di memoria* ossia non è influenzato dai tempi di permanenza nei precedenti stati, si dimostra che nelle catene markoviane con la variabile tempo discreta, il tempo di permanenza nello stato è **distribuito geometricamente** mentre nei processi con variabile tempo continua, il tempo di permanenza nello stato è **distribuito in maniera esponenziale.**

## 1.3 - STRUTTURA DEI MODELLI DI CODE

### 1.3.1 - *La popolazione.*

Procediamo ora nell'analisi delle componenti fondamentali di un processo di code.

***La popolazione*** è sostanzialmente rappresentata dall'**insieme dei potenziali utenti**.

Tutte le persone, per esempio, che dispongono di un terminale collegato con un centro di calcolo presso una società o un ente pubblico sono automaticamente dei potenziali utilizzatori delle risorse del centro stesso - oppure tutti i proprietari di una autovettura per quanto concerne la rete stradale ed autostradale.

Il poter definire la dimensione della popolazione dei potenziali utenti ed eventualmente la sua evoluzione nel tempo, può essere estremamente interessante al fine anche di valutare la convenienza a modificare la struttura e la dimensione dell'unità che deve soddisfare le richieste di servizio.

La citata analisi dimensionale può, in talune circostanze, essere anche effettuata a monte di eventuali decisioni. Si pensi ad esempio alle scelte che ha dovuto effettuare la società dei servizi telefonici nel momento in cui dovevano essere introdotti sul mercato i telefoni cellulari. Si trattava in altri termini di valutare, con appropriate stime, a quante persone poteva essere offerto il servizio, a quante persone poteva interessare e quante richieste di abilitazioni di telefoni cellulari potevano quindi arrivare alla Società. In tale contesto doveva comunque essere predisposta una struttura tecnica tale da poter soddisfare le richieste della popolazione dei potenziali utenti.

Possiamo quindi definire la **popolazione** come *quell'insieme di unità (persone e non) dal quale ha origine il flusso di arrivi presso un certo sistema*. Detta popolazione può essere **finita o infinita**.

Nei processi di code che andremo ad analizzare verrà comunque sempre ipotizzata una **popolazione infinita** al fine di semplificare sensibilmente le strutture dei modelli che andremo ad analizzare ed i relativi calcoli. Si tratta comunque di un'ipotesi che può essere accettata anche in presenza di una popolazione finita ma di dimensione relativamente grande e tale per cui il flusso di unità in uscita ha un'influenza trascurabile sulla dimensione della popolazione stessa.

**La seconda ipotesi** semplificativa che viene qui introdotta è che **tutte le unità servite rientrino successivamente nella popolazione dei potenziali utenti.**

### **1.3.2 - La coda.**

Come abbiamo visto, dalla popolazione dei potenziali utenti ha origine il flusso di arrivi presso il sistema e i relativi punti di servizio.

Gli arrivi presso i punti di servizio, in un certo intervallo di tempo ( $\Delta t$ ) prefissato, potranno verificarsi in modi diversi secondo il tipo di procedura o di sistema oggetto dell'analisi.

Nei modelli che verranno in questa sede considerati sarà sempre introdotta l'ipotesi che gli arrivi avvengano secondo una **distribuzione di Poisson** oppure, visto sotto altro aspetto, che il **tempo intercorrente tra un arrivo ed il successivo abbia una distribuzione esponenziale.**

Ora, nella gran parte dei modelli di code ed in particolare in quelli che verranno presentati nella presente trattazione, **il numero di arrivi presso il/i punto/i di servizio è una variabile casuale** (viene quindi esclusa l'ipotesi di arrivi noti o predeterminati o comunque costanti in un certo intervallo di tempo). Analogamente si puntualizza che anche **il tempo di servizio è una variabile casuale.**

La coda che ha origine presso il/i punto/i di servizio è quindi la conseguenza di una capacità di servizio relativamente limitata e del fatto che sia il numero di arrivi in un certo intervallo di tempo sia il tempo di servizio stesso sono delle variabili casuali.

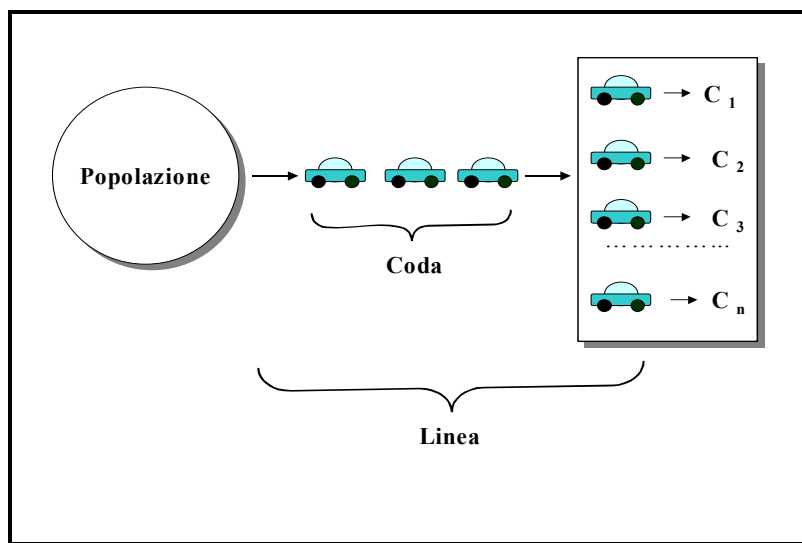
L'utilizzo dei modelli di code ha quindi lo scopo di valutare, **in termini probabilistici**, anche la lunghezza della coda, sulla base di parametri-input preventivamente inseriti nel modello stesso.

Generalmente si tende a fare una distinzione particolare per quanto concerne la coda.

*Viene definita **coda vera e propria** quella formata dalle unità presenti nel sistema ed in attesa di essere servite (escluse quelle che si*

stanno servendo). La somma delle unità presenti in coda e di quelle che si stanno servendo formano invece la **linea d'attesa**.

Figura n. 1.3  
(Il processo degli arrivi: la coda e la linea di attesa)



dove  $C_1, C_2, \dots, C_n$  sono i posti di servizio.

### 1.3.3 - La disciplina del servizio.

Tutte le unità che, dalla popolazione dei potenziali utenti andranno a formare la coda, saranno servite secondo delle regole di servizio ben precise e predeterminate. Le citate regole saranno anche fondamentali nella scelta del modello di code da utilizzare nell'analisi. Tutto ciò concorre a determinare **la disciplina del servizio**.

In molte circostanze ed in modo particolare nei sistemi in cui non vengono effettuate particolari classificazioni e suddivisioni della popolazione dei potenziali utenti, si tende ad applicare il criterio "**FIFO**" ossia viene servita per prima l'unità entrata in coda per prima.

Si pensi al casello autostradale; risulta estremamente difficile ipotizzare o immaginare un criterio di servizio diverso da quello del "primo arrivato - primo servito".

Ma se pensiamo all'ospedale ci accorgiamo come il citato criterio "FIFO" nella circostanza debba, per ovvie ragioni, essere abbandonato. Gli ammalati che giungono ad un centro di pronto soccorso di un ospedale saranno serviti sulla base dell'urgenza dell'intervento che questi richiedono: in questo caso le unità saranno quindi servite secondo un **criterio di priorità**.

Non può comunque essere esclusa, in questa sede, nemmeno l'ipotesi in cui le unità possano essere servite secondo criteri diversi da quelli sin qui enunciati come quello dell'ultimo arrivato e primo servito (LIFO) oppure, più in generale, secondo un criterio di casualità.

In questa sede verranno comunque trattati modelli di code in cui l'ordine di servizio è quello del primo arrivato e primo servito mentre si rinvia alle pubblicazioni elencate in bibliografia per ulteriori approfondimenti su modelli utilizzando regole di servizio diverse.

#### ***1.3.4 - L'organizzazione e la struttura del punto di servizio.***

Ogni unità che dalla popolazione entra in coda, una volta esaurita l'attesa viene servita.

L'analisi dell'organizzazione della struttura che deve offrire il servizio è fondamentale per la scelta del modello da utilizzare per lo studio del sistema.

Non esistono comunque regole precise nell'organizzazione di una struttura che deve soddisfare le richieste di una certa popolazione. In questa sede si intende comunque illustrare quelli che sono gli aspetti fondamentali che possono contraddistinguere un certo insieme di punti di servizio da altri.

Una prima distinzione fondamentale può quindi riguardare il numero di posti di servizio presenti nel sistema. Il distributore di carburante, il supermarket, i caselli autostradali sono tutti esempi di

sistemi e strutture a più posti di servizio ( $s > I$ ). Analogamente si può dire che il droghiere o il cartolaio che gestiscono da soli il proprio negozio sono esempi di sistemi ad un solo posto di servizio ( $s = I$ ).

Nell'analizzare il punto di servizio assume inoltre particolare rilievo anche verificare come venga offerto dal sistema il servizio richiesto. Oggetto dell'analisi diventa quindi il **meccanismo del servizio**. Le richieste delle unità in coda possono venir soddisfatte in un'unica fase oppure secondo una sequenza di fasi parziali successive.

Quanto sopra non può essere trascurato nella scelta del modello da utilizzare nello studio di un sistema di code e comunque fondamentale diventa quindi anche l'analisi del **meccanismo di servizio**.

La conoscenza dell'organizzazione del sistema e di come le unità in arrivo si muovono all'interno del sistema di code risulta essenziale al fine di meglio organizzare anche la raccolta dati e la ricerca dei parametri da utilizzare quali input dei modelli di code prescelti per l'analisi.

Il tempo che ogni unità in arrivo trascorrerà all'interno del sistema di code - definito **tempo di servizio o di trattenimento** - sarà senza dubbio condizionato dall'organizzazione del sistema e da come il servizio verrà offerto agli utenti.

In presenza di più punti di servizio dovrà essere ricercata la distribuzione di probabilità dei tempi di servizio per ogni punto anche se l'assunzione di un'ipotesi di identica distribuzione per tutti i punti di servizio può, in moltissime circostanze, essere considerata molto realistica.

Avremo in seguito occasione di vedere come la distribuzione di probabilità di *Erlang* ed il suo caso particolare ossia la distribuzione *esponenziale* saranno quelle prescelte per rappresentare la distribuzione di probabilità dei tempi di servizio nel sistema.

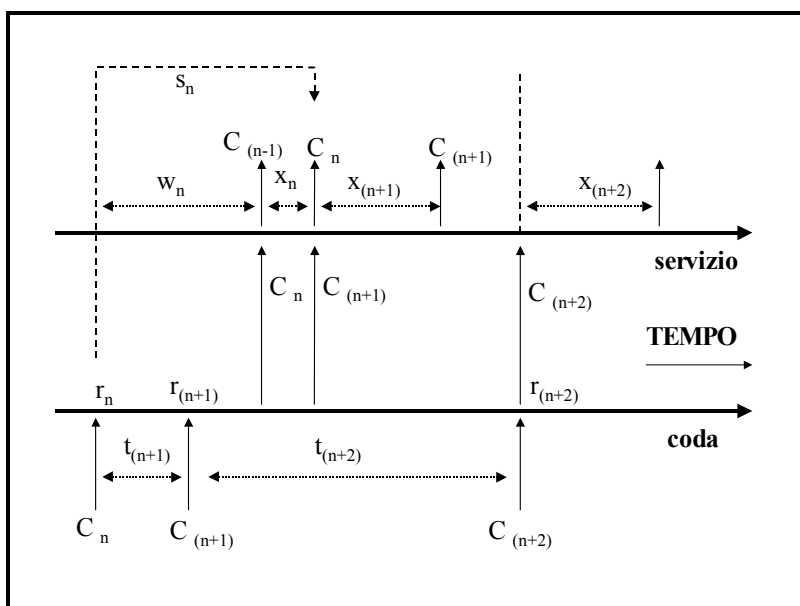
### 1.3.5 - Esempi di rappresentazione grafica dei processi di code.

La coda ed il suo processo può anche essere rappresentata graficamente al fine di dare una immagine immediata di quello che può essere il problema oggetto dell'analisi.

Molteplici possono quindi essere le tecniche di illustrazione del sistema sulla base anche del particolare aspetto che si vuole porre in evidenza.

Il seguente diagramma si pone l'obiettivo di illustrare l'evoluzione del sistema al trascorrere del tempo.

Figura n. 1.4  
da L. Kleinrock



Viene posta come ipotesi fondamentale che le unità in arrivo vengano servite secondo il criterio del primo arrivato e primo servito.

Si specifica inoltre quanto segue:

$C_n$  = n-esima unità presente nel sistema;

$t_n$  = tempo intercorrente tra l'arrivo dell'unità  $(n-1)$  e l'unità  $n$ ;

$r_n$  = tempo di arrivo dell'unità  $n$ -esima;

$w_n$  = tempo di attesa nel sistema dell'  $n$ -esima unità (escluso il tempo di servizio);

$x_n$  = tempo di servizio o di trattenimento dell' $n$ -esima unità;

$s_n$  = tempo di permanenza nel sistema dell' $n$ -esima unità.

Analizzando la figura 1.4 vediamo quindi che il servizio di  $C_n$  inizia solo nel momento in cui esce dal sistema  $C_{n-1}$ . Si noti inoltre che, ancor prima che inizi il servizio di  $C_n$ , in coda è entrato anche  $C_{n+1}$ .

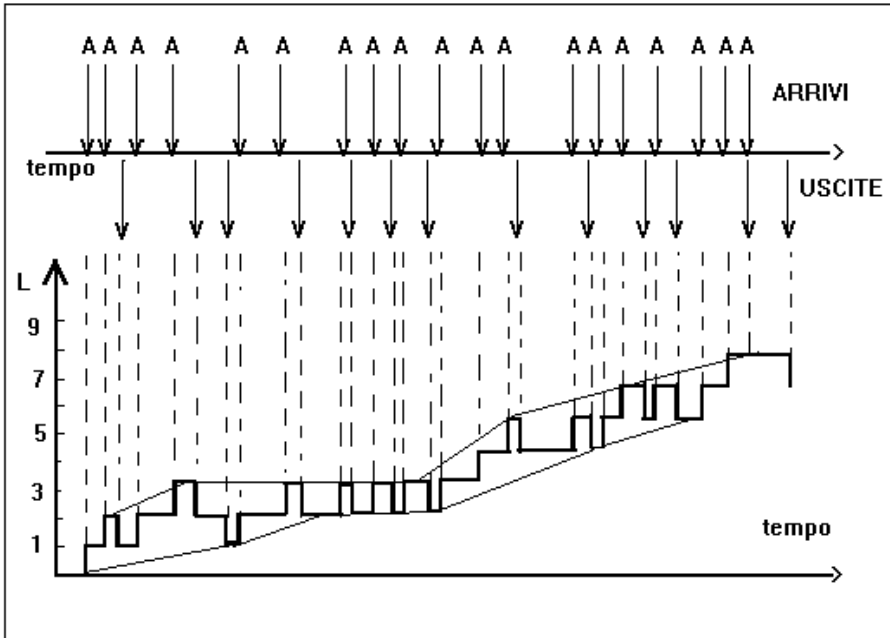
Si noti inoltre che  $S_n$  copre l'intera fascia di tempo che va dall'arrivo della  $n$ -esima unità nel sistema alla sua uscita.

Nel periodo di tempo intercorrente tra l'arrivo  $(n+1)$ esimo e l' $(n+2)$ esimo esiste un intervallo in cui il servizio è inattivo.

Come si può notare, la figura 1.4 rappresenta un modo estremamente valido per illustrare il processo di code nel tempo e può essere utilizzato anche al fine di poter confrontare la reale situazione di un sistema con i risultati forniti da un modello di code.

Per una analisi più diretta dello sviluppo della dimensione della coda nel tempo può comunque essere utilizzato lo schema grafico rappresentato dalla figura n. 1.5:

*Figura n. 1.5*  
*Evoluzione della coda nel tempo.*



Un'analisi della figura citata ed in particolare del grafico relativo alla dimensione della linea d'attesa, ci può permettere di verificare quanto il sistema sia distante dall'ipotesi di stazionarietà (\*). In particolare si considerino le spezzate che uniscono tutti i punti di massimo e di minimo relativo della linea d'attesa. Dette spezzate dovrebbero avere un andamento il più possibile parallelo all'asse delle ascisse ed inoltre la distanza tra di loro dovrebbe essere minima. La positiva verifica delle predette ipotesi evidenzia che la coda tende ad assumere una dimensione prossima al suo valore medio.

---

(\*) Successivamente verrà illustrato nei dettagli il concetto di stazionarietà di un sistema di code.

### 1.3.6 - Definizioni.

Raggruppiamo e commentiamo ora le definizioni che verranno utilizzate nella costruzione dei modelli.

$E_n$  = stato in cui vi sono  $n$  unità presenti nel sistema;

$P_n(t)$  = probabilità che al tempo  $t$  vi siano esattamente  $n$  unità nel sistema di code;

$s$  = numero di posti di servizio nel sistema di code;

$\lambda_n$  = tasso medio di arrivo di nuove unità quando nel sistema sono già presenti  $n$  unità;

$\mu_n$  = tasso medio di servizio quando nel sistema sono presenti  $n$  unità;

$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$  - *fattore di utilizzazione del sistema.*

inoltre

$L$  = lunghezza attesa della "LINEA" (comprese le unità che si stanno servendo);

$L_q$  = lunghezza attesa della "CODA" (escluse le unità che si stanno servendo);

$W$  = tempo medio di attesa nel sistema (compreso il tempo di servizio);

$W_q$  = tempo medio di attesa nella coda (escluso il tempo di servizio).

### 1.3.7 - Alcune considerazioni riepilogative.

L'esposizione sin qui effettuata può permetterci di trarre alcune considerazioni.

**Una delle caratteristiche fondamentale dei modelli di code è quella di essere descrittivi.** In altri termini, l'utilizzo di modelli di code non ci potrà permettere di ottenere delle soluzioni ottimali. Il modello deve quindi essere visto come uno strumento o "un meccanismo" che, partendo da degli input a suo tempo ricevuti (parametri e variabili) ci fornirà dei valori che vengono definiti output

del modello (lunghezze delle code, tempi di attesa, ecc..) al fine di darci un'immagine del sistema analizzato.

In tale contesto si deduce che il valore dei risultati delle analisi sui processi di code dipendono, sia dalla validità del modello usato sia, ed in modo non trascurabile, dall'abilità e dalle capacità dell'analista e di chi è preposto all'utilizzo dei modelli stessi. Molto importante è quindi avere una visione il più possibile chiara e completa del sistema che viene analizzato ed in particolare dei meccanismi e delle regole che lo governano.

Fondamentale è quindi la prima fase dell'analisi di un processo di code che deve avere l'obiettivo di studiare l'organizzazione del sistema nonché l'ambiente in cui il sistema stesso è inserito. Se consideriamo, ad esempio, uno sportello bancario ubicato in zona periferica di una grossa città dove la clientela arriva utilizzando i mezzi pubblici, sappiamo già a priori che gli arrivi della clientela presso l'agenzia bancaria saranno condizionati dalla frequenza dei mezzi pubblici e quindi difficilmente avranno una distribuzione di probabilità di tipo poissoniano anzi, in tale circostanza, gli arrivi avverranno secondo flussi periodici che dipenderanno dalla frequenza di arrivo dei mezzi pubblici. Il conoscere già a priori le predette situazioni e gli aspetti del sistema e del suo ambiente non può che essere di fondamentale aiuto al fine di ridurre i tempi dell'analisi e di verifica sulla positiva applicazione di modelli di code nello studio del sistema.

L'utilizzo di strumenti grafici e visivi come quelli illustrati nella sezione 1.3.5 può contribuire a facilitare ulteriormente l'analisi dei sistemi ed in particolare di quelli relativamente complessi.

Rappresentazioni grafiche orientate all'analisi dell'evoluzione della coda nel tempo (vedasi figura n. 1.5) possono essere utili per verificare l'ipotesi di stazionarietà o meno di un sistema.

## 1.4 - MODELLI DI CODE

### 1.4.1 - *Il processo di nascita-morte: postulati fondamentali.*

Il processo di nascita-morte che verrà analizzato può essere visto come un esempio di catena Markoviana.

Un particolare stato  $E_n$  del sistema può essere raggiunto muovendoci dagli stati immediatamente vicini ( $n-1$  oppure  $n+1$ ). Resta inteso comunque che lo stato  $E_n$  può essere anche la conseguenza di *nessun movimento* da uno stato predefinito. Viene quindi presa in considerazione anche la situazione in cui il sistema permanga in un certo stato.

L'ipotesi di **catena markoviana** alla quale si farà riferimento in questa sede è quella con **variabile tempo di tipo continuo** in quanto di maggiore interesse. Esiste comunque un'analisi parallela relativa al caso di variabile tempo di tipo discreto.

*Il movimento del sistema dallo stato  $E_{n-1}$  allo stato  $E_n$  definisce una nascita.*

*In maniera analoga, il movimento del sistema dallo stato  $E_{n+1}$  allo stato  $E_n$  definisce una morte.*

**La nascita viene quindi ricondotta ad un arrivo mentre la morte viene ricondotta ad un'uscita dal sistema.**

In tale contesto vengono introdotti i concetti di **tasso di arrivo** ( $\lambda$ ) e di **tasso di uscita** ( $\mu$ ) dal sistema:

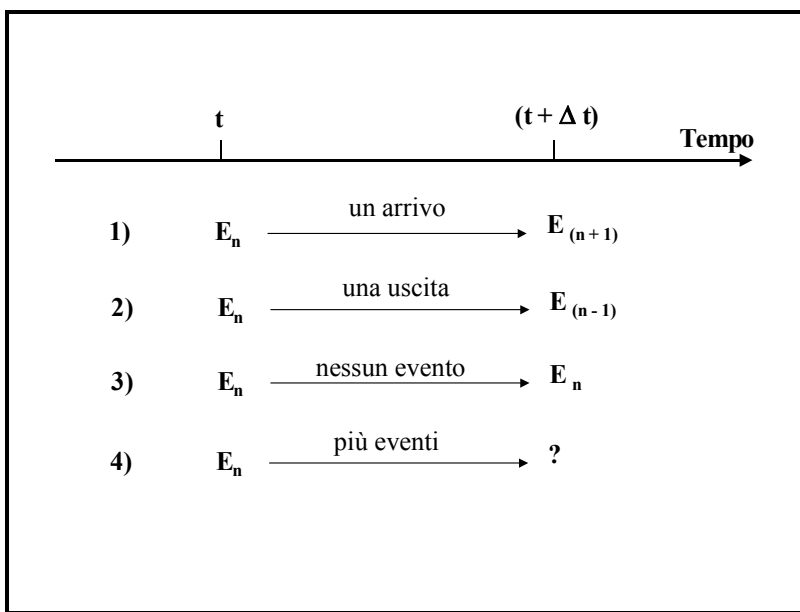
- $\lambda_n$  definisce il **tasso di arrivo** quando nel sistema sono presenti esattamente  $n$  unità.
- $\mu_n$  definisce il **tasso di uscita** quando nel sistema sono presenti esattamente  $n$  unità.

Si noti che sia il tasso di arrivo sia il tasso di uscita non dipendono dal tempo ma solo dallo stato  $E_n$  del sistema.

Ipotizziamo ora che il sistema di code si trovi in un certo stato  $E_n$  al tempo  $t$  ed andiamo ad analizzare cosa può succedere in un certo

intervallo di tempo di ampiezza  $\Delta t$ . A tale scopo si consideri la seguente figura:

*Figura n. 1.6*  
*Evoluzione del sistema in  $\Delta t$*



Per ipotesi il verificarsi di uno dei quattro eventi sopra descritti esclude automaticamente gli altri e quindi gli stessi sono stocasticamente indipendenti.

Nell'intervallo di tempo di ampiezza  $\Delta t$  può quindi verificarsi o un arrivo, o una uscita, o più eventi, o nessun evento.

A differenza di quanto detto per i tassi di arrivo ed uscita, lo **stato del sistema dipende dal tempo  $t$** .

Possiamo ora introdurre i **tre postulati fondamentali della teoria delle code**.

1) *Postulato della nascita:*

- Sia dato un sistema allo stato  $E_n$  al tempo  $t$  con  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . La probabilità che avvenga una sola entrata nell'intervallo di tempo da  $t$  a  $(t + \Delta t)$  è pari a:

$$\lambda_n \Delta t + o(\Delta t) \quad (1.4.1)$$

dove  $\lambda_n$  è una costante positiva.

2) *Postulato della morte:*

- Sia dato un sistema allo stato  $E_n$  al tempo  $t$  con  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . La probabilità che avvenga una sola uscita (morte) nell'intervallo di tempo da  $t$  a  $(t + \Delta t)$  è pari a:

$$\mu_n \Delta t + o(\Delta t) \quad (1.4.2)$$

dove  $\mu_0 = 0$  e  $\mu_n$  è una costante positiva per  $n > 0$ .

3) *Postulato del salto multiplo:*

- Sia dato un sistema allo stato  $E_n$  al tempo  $t$  con  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . La probabilità che nell'intervallo di tempo da  $t$  a  $(t + \Delta t)$  si verifichino più eventi (nascite e/o morti) è pari a:

$$o(\Delta t) \quad (1.4.3)$$

Quest'ultima espressione che viene chiamata "*o piccolo*", rappresenta una funzione di  $\Delta t$  che assume valori trascurabili una volta scelto un valore sufficientemente piccolo di  $\Delta t$ . Quindi  $o(\Delta t)$  identifica una funzione di  $\Delta t$  tale per cui si ha:

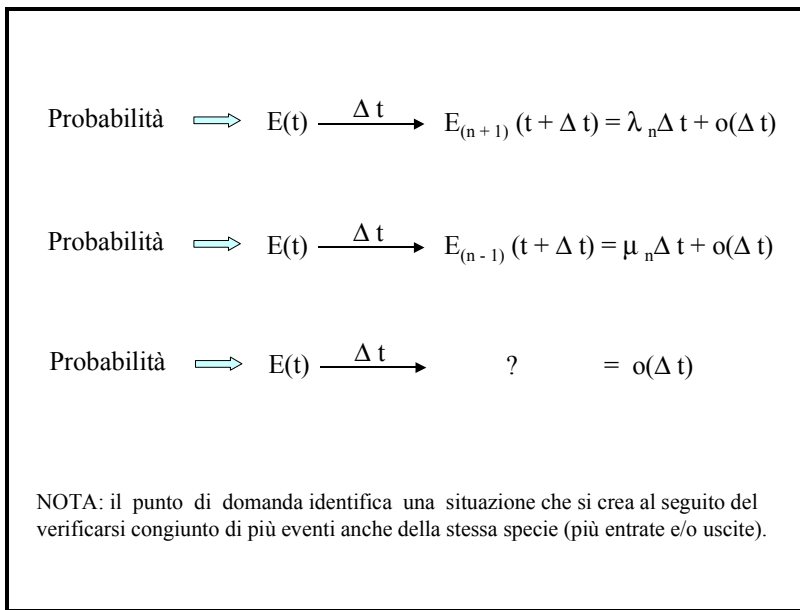
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0 \quad (1.4.4)$$

La figura n. 1.7 ci rappresenta visivamente quanto appena esposto.

Partendo dalle definizioni dei tre postulati si può arrivare a definire la probabilità che nell'intervallo di tempo sopracitato non si verifichi nessun evento.

Sapendo infatti che la somma delle **1.4.1**, **1.4.2** e **1.4.3** corrisponde alla probabilità che nell'intervallo di tempo da  $t$  a  $(t + \Delta t)$  si verifichi una delle tre ipotesi enunciate nei tre postulati, **il complemento ad 1** della citata somma di probabilità corrisponde alla probabilità che nello stesso intervallo non si verifichi nessuno dei tre eventi.

*Figura n. 1.7*  
**Il processo di nascita-morte**



Si deduce quindi il seguente corollario:

- *Sia dato un sistema allo stato  $E_n$  al tempo  $t$  con  $n=0,1,2,3,\dots$ . **La probabilità che non si verifichi alcun evento nell'intervallo di tempo da  $t$  a  $(t + \Delta t)$  è pari a:***

$$1 - \{[\lambda_n \Delta t + o(\Delta t)] + [\mu_n \Delta t + o(\Delta t)] + o(\Delta t)\} = \quad (1.4.5)$$

$$= 1 - \lambda_n \Delta t - \mu_n \Delta t + o(\Delta t)$$

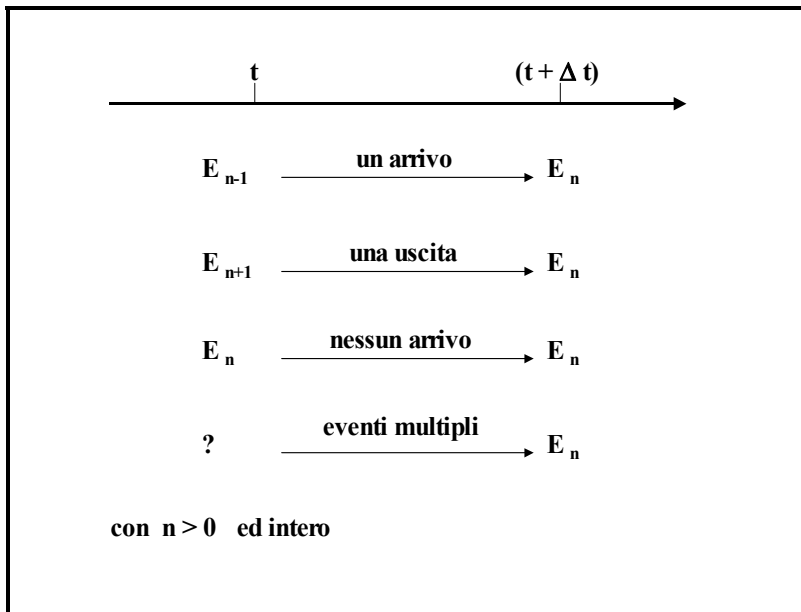
tenendo presente che dalla somma di entità trascurabili si ottiene un'entità trascurabile e quindi che:

$$|o_1(\Delta t)| + |o_2(\Delta t)| + \dots + |o_n(\Delta t)| = o(\Delta t) \quad (1.4.6)$$

### 1.4.2 - Analisi del processo nascita-morte.

Consideriamo ora il sistema di code in un certo stato  $E_n$  ed andiamo ad analizzare come il citato stato possa essere raggiunto in un certo intervallo di tempo di ampiezza  $\Delta t$ . A tale scopo può essere d'aiuto la figura n. 1.8:

*Figura n. 1.8*



Sarebbe sicuramente interessante e fondamentale, nell'analisi di un processo di code, conoscere la distribuzione di probabilità della lunghezza della coda e del tempo di attesa nel sistema.

Ora, pur non essendo possibile risolvere il problema per quanto concerne il tempo di attesa, è possibile invece arrivare ad ottenere dei risultati per quanto concerne le probabilità di stato del sistema. In tale contesto procederà quindi l'analisi.

Nel considerare le quattro situazioni rappresentate dalla *figura 1.8* si ottengono rispettivamente le seguenti **probabilità**:

- evento: **un arrivo** nell'intervallo di tempo da  $t$  a  $(t + \Delta t)$ :

$$P_{n-1}(t)[\lambda_{n-1}\Delta t + o(\Delta t)] \quad (1.4.7)$$

- evento: **un'uscita** nell'intervallo di tempo da  $t$  a  $(t + \Delta t)$ :

$$P_{n+1}(t)[\mu_{n+1}\Delta t + o(\Delta t)] \quad (1.4.8)$$

- **nessun evento** nell'intervallo di tempo da  $t$  a  $(t + \Delta t)$ :

$$P_n(t)[1 - \lambda_n\Delta t - \mu_n\Delta t + o(\Delta t)] \quad (1.4.9)$$

- **più eventi (eventi multipli)** nell'intervallo di tempo da  $t$  a  $(t + \Delta t)$ :

$$o(\Delta t) \quad (1.4.10)$$

### 1.4.3 - *Le probabilità di stato nei modelli non stazionari.*

Sapendo ora che il verificarsi di una sola delle quattro ipotesi descritte nella sezione precedente esclude automaticamente il verificarsi delle altre, si può ricavare la generica probabilità di stato  $n$  al tempo  $(t + \Delta t)$  che è data dalla **somma delle quattro singole probabilità di stato**. Per cui:

$$P_n(t + \Delta t) = P_{n-1}(t)[\lambda_{n-1}\Delta t + o(\Delta t)] + P_{n+1}(t)[\mu_{n+1}\Delta t + o(\Delta t)] + P_n(t)[1 - \lambda_n\Delta t - \mu_n\Delta t + o(\Delta t)] + o(\Delta t) \quad (1.4.11)$$

Ricordando ora la 1.4.6, in merito alla somma di elementi trascurabili, si possono sommare le  $o(\Delta t)$  per cui si ottiene:

$$P_n(t + \Delta t) = P_{n-1}(t)\lambda_{n-1}\Delta t + P_{n+1}(t)\mu_{n+1}\Delta t + P_n(t)[1 - \lambda_n\Delta t - \mu_n\Delta t] + o(\Delta t) \quad (1.4.12)$$

Se sottraiamo, ad entrambi i membri della 1.4.12.,  $P_n(t)$  e dividendo per  $\Delta t$  otteniamo la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \frac{P_n(t + \Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} &= \\ &= \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)P_n(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

Sapendo ora che l'equazione 1.4.13, nel nostro caso, è valida per ogni valore di  $\Delta t$  positivo maggiore di zero, è possibile calcolare il suo valore per  $\Delta t$  che tende a zero. Per cui:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_n(t + \Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} &= \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)P_n(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \right\} \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

Come si può notare, il primo membro dell'equazione non è altro che la derivata di  $P_n(t)$  rispetto a  $t$ . Riprendendo inoltre la 1.4.4 si ottiene quanto segue:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)P_n(t) \quad (1.4.15)$$

definita per ogni valore di  $n > 0$

Nell'ipotesi in cui  $n = 0$  sappiamo che  $\lambda_{n-1} = 0$  ed inoltre che  $\mu_0 = 0$  per cui la 1.4.15 diventa:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu_1 P_1(t) - \lambda_0 P_0(t) \quad (1.4.16)$$

Utilizzando quindi l'espressione **1.4.15 e 1.4.16 si ottiene un sistema di  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  equazioni differenziali** le cui soluzioni sono i valori  $P_n(t)$ . Purtroppo risulta assai difficile trovare le citate soluzioni in quanto non esiste una soluzione generale del sistema di equazioni differenziali.

Quanto appena ottenuto merita comunque una particolare considerazione nel senso che ci permette di trarre delle conclusioni in merito ad un sistema in uno stato di **non stazionarietà**.

*Come si vede quindi le probabilità di stato del sistema sono condizionate dalla variabile tempo.*

La 1.4.15 e la 1.4.16 definiscono quindi la “velocità” con la quale variano  $P_n$  e  $P_0$  rispetto alla variabile tempo.

Nell'esaminare un caso concreto, come per esempio uno sportello bancario, si può affermare che, nell'ipotesi di **non stazionarietà**, la probabilità che il sistema si trovi in un certo stato  $E_n$  varia in funzione del momento o del periodo della giornata che si considera.

Al di là delle difficoltà oggettive, che purtroppo sussistono nel ricercare le citate probabilità di stato, i risultati ottenuti assumono una particolare rilevanza in quanto possono essere considerati come il punto di partenza per arrivare a determinare le soluzioni in condizione di stazionarietà del sistema.

Le pagine che seguiranno si pongono quindi l'obiettivo di illustrare tali tipi di soluzioni.

#### 1.4.4 - Un processo di sole nascite.

Prima di illustrare i sistemi di code in stato *stazionario* verranno analizzati due semplici processi che, anche se difficilmente si potranno verificare nella realtà, hanno un'importanza non trascurabile dal punto di vista teorico.

In questa sezione verrà presentato il processo a sole entrate (o soli arrivi) mentre nella prossima verrà introdotto il processo a sole uscite.

Consideriamo quindi un sistema che si evolve in un'unica direzione. A fronte di un flusso di arrivi non si verifica nessuna uscita per cui:

$$\mu_n = 0 \quad (1.4.17)$$

per ogni valore di  $n$

Viene inoltre introdotta un'ulteriore ipotesi che contribuisce a semplificare ulteriormente il problema:

$$\lambda_n = \lambda \quad (1.4.18)$$

per tutte le  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

Con quest'ultima ipotesi si è assunto che il tasso di arrivo nel sistema sia indipendente dal numero di unità presenti nella coda. Anche se in casi particolari, come nella situazione di coda in esplosione o comunque che supera i normali livelli, l'ipotesi introdotta può non essere accettata, in situazioni di normalità essa può essere assunta come rappresentativa di una situazione reale.

Sulla base delle ipotesi introdotte, dalla 1.4.15 e 1.4.16 si ottiene quanto segue:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \quad (1.4.19)$$

con  $n \geq 1$  ed *intero*;

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) \quad (1.4.20)$$

con  $n = 0$

Si ipotizzi che il sistema parta, *al tempo 0*, senza elementi in coda e quindi allo stato  $E_0$  per cui:

$$P_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } n = 0 \\ 0 & \text{per } n \neq 0 \end{cases} \quad (1.4.21)$$

Sapendo ora che:

$$\int -\lambda P_0(t) dt = e^{-\lambda t} + c \quad (1.4.22)$$

risolvendo l'equazione differenziale 1.4.20 si ottiene che:

$$P_0(t) = e^{-\lambda t} \quad (1.4.23)$$

Sostituendo nella 1.4.19 per  $n = 1$  si ottiene:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda P_1(t) + \lambda e^{-\lambda t} \quad (1.4.24)$$

la cui soluzione è:

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t} \quad (1.4.25)$$

in quanto:

$$\frac{d(\lambda t e^{-\lambda t})}{dt} = \lambda e^{-\lambda t} - \lambda(\lambda t) e^{-\lambda t} \quad (1.4.26)$$

Nell'espressione appena riportata vengono evidenziate le probabilità di stato che troviamo nella 1.4.19 con  $n = 1$ .

Procedendo nell'analisi, per valori di  $n=2,3,4,\dots,n$ , si ottiene la seguente soluzione generale:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \quad (1.4.27)$$

Quella appena ottenuta non è altro che la **distribuzione di probabilità di Poisson rispetto a  $n$  con parametro  $\lambda t$** . La media e la varianza del numero di arrivi in un certo intervallo di ampiezza  $t$  è pari a  $\lambda t$  mentre il tasso di arrivo (o velocità di arrivo) è  $\lambda$ .

L'espressione 1.4.23 rappresenta la probabilità che il sistema si trovi ancora allo stato  $E_0$  al tempo  $t$  e poiché il sistema al tempo  $0$  è sempre allo stato  $E_0$  essa non è altro che la probabilità che non si verifichi nessuna entrata nell'intervallo di tempo che va da  $0$  a  $t$ . Di conseguenza, la probabilità che nello stesso intervallo di tempo si verifichi il primo arrivo e quindi almeno una nascita, è pari a:

$$\sum_n P_n(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (1.4.28)$$

con  $n > 0$  ed intero.

*Quest'ultima espressione non è altro che la funzione di distribuzione cumulativa della **variabile casuale "tempo del primo arrivo ( $T$ )" per cui:***

$$F(t) = P\{T \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t} \quad (1.4.29)$$

La funzione di densità di probabilità di  $T$  è quindi:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t} \quad (1.4.30)$$

La variabile  $T$  è quindi distribuita esponenzialmente.

Come evidenziato all'inizio della presente parte, i processi di nascita e morte possono essere considerati come degli esempi di catene markoviane. Il processo di *Poisson* qui introdotto gode quindi della **proprietà di Markov** ossia della mancanza di memoria. In altri termini si può ipotizzare che il sistema ricominci il suo processo da zero dopo ogni entrata in quanto gli eventi precedenti possono essere trascurati dall'analisi. In tale contesto si può affermare che la 1.4.29 e la 1.4.30 descrivono il tempo intercorrente tra una entrata qualsiasi e la successiva la cui distribuzione di probabilità è *esponenziale* con parametro  $\lambda$ . Il tutto equivale alla probabilità di stato distribuita in maniera *poissoniana*. **Si deduce quindi che modelli con arrivi poissoniani possono essere visti anche come modelli con intertempi di arrivo esponenziali.**

Dalla 1.4.30 si può infine ottenere il valore atteso del tempo intercorrente tra un arrivo ed il successivo che dato da:

$$E(t) = \int_0^{\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt = \lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt = \quad (1.4.31)$$

integrando per parti si ottiene:

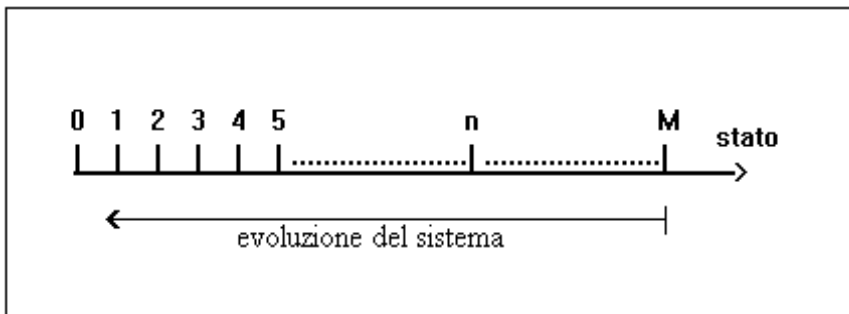
$$\begin{aligned} &= \lambda \left\{ \left[ t \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} dt \right\} = \lambda \left\{ 0 + \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} dt \right\} = \\ &= 0 + \lambda \left[ -\frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda t} \right]_0^{\infty} = \lambda \left( \frac{1}{\lambda^2} \right) = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Abbiamo quindi verificato che in un processo di sole nascite con tasso di arrivo  $\lambda$  costante ed indipendente dallo stato del sistema, gli arrivi hanno una distribuzione di *Poisson* e gli intertempi di arrivo una distribuzione *esponenziale* mentre l'intervallo medio tra gli arrivi è  $1/\lambda$ .

#### 1.4.5 - Un processo di sole uscite.

Nel processo di sole uscite il sistema si trova nella situazione opposta rispetto al caso analizzato nella precedente sezione. Si parte infatti con un certo numero  $M$  di unità presenti che progressivamente usciranno dal sistema dopo essere state servite. Il processo, che **termina quindi dopo  $M$  eventi (uscite)**, può essere illustrato dalla seguente figura:

Figura n. 1.9  
Il processo di sole uscite



Nel caso in esame si pone quindi:

$$\lambda_n = 0 \quad \mu_n = \mu \quad (1.4.32)$$

per  $n = 1, 2, 3, \dots, M$

Riprendendo la 1.4.15 e la 1.4.16 e sostituendo, si ottiene:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \mu P_{n+1}(t) - \mu P_n(t) \quad (1.4.33)$$

per  $n = 1, 2, 3, \dots, (M-1)$

$$\frac{dP_M(t)}{dt} = -\mu P_M(t) \quad (1.4.34)$$

Risolviendo l'equazione differenziale 1.4.34, come già fatto per il processo a sole entrate, si ottiene:

$$P_M(t) = e^{-\mu t} \quad (1.4.35)$$

Analizzando la figura 1.9 si vede che il sistema si troverà allo stato  $E_n$  al tempo  $t$  solo nel momento in cui si saranno verificate  $(M-n)$  uscite nell'intervallo di tempo da 0 a  $t$ . E' possibile quindi ottenere la generica probabilità di stato  $P_n(t)$  come già visto nella sezione precedente per il sistema a sole entrate.

$$P_n(t) = \frac{(\mu t)^{(M-n)} e^{-\mu t}}{(M-n)!} \quad (1.4.36)$$

per  $n = 1, 2, 3, 4, \dots, M$

L'espressione appena riportata quindi non è altro che la probabilità che avvengano esattamente  $(M-n)$  uscite nell'intervallo di tempo da 0 a  $t$ . Se, inoltre, si considera il caso in cui nello stesso intervallo di tempo avvengano esattamente  $M$  uscite si determina quanto segue:

$$P_0(t) = 1 - \sum_{n=1}^M P_n(t) \quad (1.4.37)$$

L'espressione 1.4.36 identifica una **distribuzione di probabilità di Poisson tronca** in quanto il processo di uscita dal sistema ha termine quando  $n = M$ . Il parametro della citata distribuzione è pari a  $(\mu t)$  ed il tasso di uscita dal sistema o tasso di servizio è  $\mu$ .

Per quanto concerne l'analisi dei tempi di servizio consideriamo la variabile casuale  $T$  che rappresenta il tempo che deve trascorrere affinché il sistema si porti allo stato  $E_0$ . Com'è facile intuire il citato tempo sarà condizionato dal numero di unità presenti nel sistema e quindi la funzione di densità di probabilità sarà  $f(t | E_n)$ . Nell'ipotesi in cui la disciplina del servizio sia quella del "primo arrivato - primo servito" la citata funzione di densità diventa **la distribuzione di probabilità del tempo di attesa dell'ennesima unità presente nel sistema (incluso il tempo di servizio)**.

Accettando l'ipotesi che il tempo di servizio di ogni unità abbia una distribuzione esponenziale la variabile casuale  $T$  diventa automaticamente una variabile casuale somma di  $n$  variabili casuali indipendenti e distribuite in maniera identica. Si dimostra che la citata somma di variabili casuali genera una distribuzione **gamma** la cui funzione di densità è:

$$f(t | E_n) = \frac{\mu^n t^{n-1} e^{-\mu t}}{(n-1)!} \quad (1.4.38)$$

meglio conosciuta anche come **distribuzione di Erlang**.

Dopo quanto esposto è possibile anche determinare la probabilità che la variabile  $T$  superi un certo valore  $t$  predeterminato. Essa è data da:

$$P\{T > t | E_n\} = \int_t^{\infty} f(x | E_n) dx \quad (1.4.39)$$

#### 1.4.6 - Stato stazionario del sistema di code.

Nella quasi totalità dei sistemi di code si possono trovare dei periodi in cui il processo di entrata e di uscita assume una particolare configurazione. Si possono quindi individuare degli intervalli di tempo in cui gli arrivi aumentano in modo consistente e parallelamente individuare altri periodi in cui gli arrivi diminuiscono sensibilmente determinando uno stato di sotto utilizzo del sistema.

Nell'analisi dei sistemi di code assume quindi una particolare rilevanza l'individuazione di quegli intervalli temporali in cui lo stato del sistema risulta condizionato dal tempo. La determinazione di questi periodi, in cui le probabilità di stato dipendono dal tempo, ci permettono, per esclusione, di poter focalizzare l'attenzione su quelle fasi in cui il sistema analizzato può trovarsi in uno stato stazionario.

Nelle pagine che seguiranno verranno introdotte ed illustrate le soluzioni in regime stazionario ossia in una situazione in cui **la probabilità di stato del sistema diventa indipendente dal tempo t**.

L'ipotesi di stazionarietà del sistema assume una particolare rilevanza in quanto, in primo luogo, non può essere considerata un'ipotesi irrealistica ed in secondo luogo ci permette di risolvere le equazioni differenziali introdotte nell'analisi del sistema non in stato stazionario.

L'ipotesi di stazionarietà del sistema può essere sintetizzata dalla seguente condizione:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = 0 \quad (1.4.40)$$

Riprendendo quanto ottenuto nell'analisi delle probabilità di stato nei modelli non stazionari (*processo di entrata-uscita*), sappiamo che esiste una soluzione nello stato stazionario quando:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = P_n \quad (1.4.41)$$

per cui si ottiene:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{dP_n(t)}{dt} \right\} = 0 \quad (1.4.42)$$

Dalle espressioni 1.4.41 e 1.4.42, riprendendo la 1.4.15 e calcolando il limite per  $t \rightarrow \infty$  si ottiene:

$$\lambda_{n-1}P_{n-1} + \mu_{n+1}P_{n+1} - (\lambda_n + \mu_n)P_n = 0 \quad (1.4.43)$$

con  $n > 0$  ed *intero*.

$$\mu_1 P_1 - \lambda_0 P_0 = 0 \quad (1.4.44)$$

con  $n = 0$

dalla quale si ottiene:

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 \quad (1.4.45)$$

Ora, sapendo che l'espressione 1.4.43 può essere scritta nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
\mu_n P_n - \lambda_{n-1} P_{n-1} &= \mu_{n-1} P_{n-1} - \lambda_{n-2} P_{n-2} = \\
&= \mu_{n-2} P_{n-2} - \lambda_{n-3} P_{n-3} = \dots\dots\dots = & (1.4.46) \\
&= \dots\dots\dots = \mu_1 P_1 - \lambda_0 P_0
\end{aligned}$$

sostituendo con la 1.4.44 si ottiene:

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1} \quad (1.4.47)$$

Considerando quindi il sistema di code al tempo  $t$ , con  $t$  sufficientemente grande e tendente ad infinito, vediamo che la probabilità dello stato  $E_n$  dipende esclusivamente dalla probabilità dello stato  $E_{n-1}$  precedente. Il tutto si ricollega al *concetto di catena markoviana* introdotto nella seconda parte della presente trattazione. Si deduce a questo punto che la 1.4.47 può anche essere scritta come segue:

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \left[ \frac{\lambda_{n-2}}{\mu_{n-1}} P_{n-2} \right] \quad (1.4.48)$$

e con successive iterazioni si ottiene:

$$P_n = \left( \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \right) \left( \frac{\lambda_{n-2}}{\mu_{n-1}} \right) \left( \frac{\lambda_{n-3}}{\mu_{n-2}} \right) \dots\dots\dots \left( \frac{\lambda_0}{\mu_1} \right) P_0 \quad (1.4.49)$$

per cui:

$$P_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^n \mu_i} P_0 \quad (1.4.50)$$

Sapendo ora che:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1 \quad (1.4.51)$$

si ottiene:

$$P_0 = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1 - \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^n \mu_i} P_0 \quad (1.4.52)$$

quindi:

$$P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^n \mu_i} P_0 = 1 \quad (1.4.53)$$

dalla quale si ottiene:

$$P_0 = \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^n \mu_i} \right]^{-1} \quad (1.4.54)$$

Avendo già definito  $P_n$  e ricordando il concetto di valore atteso (\*) si può ottenere:

---

(\*) Sappiamo infatti che, nel caso discreto, si ha:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n \quad (1.4.55)$$

che identifica la **lunghezza attesa della linea**.

In maniera analoga si può ottenere l'espressione rappresentante la **lunghezza attesa della coda** che è data da:

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s)P_n \quad (1.4.56)$$

dove  $s$  rappresenta il numero dei punti di servizio.

Come si può facilmente vedere le espressioni 1.4.55 e 1.4.56 identificano delle serie convergenti e che forniscono una soluzione dei modelli che andremo successivamente ad analizzare. Nel caso generale comunque le predette espressioni possono fornire una soluzione approssimata sommando un numero di termini finito ma tale da garantire un errore sufficientemente piccolo.

#### 1.4.7 - Analisi della distribuzione di Poisson.

La già più volte citata distribuzione di probabilità di **Poisson** assume una particolare rilevanza nell'analisi dei processi di code in quanto, come sperimentalmente dimostrato, essa ben si adatta a descrivere la maggior parte dei processi di arrivo presso un sistema ed in particolar modo in quei casi in cui l'arrivo di una unità non è influenzato dal precedente ed a sua volta non influenza il successivo.

Si può dimostrare infatti che in molti casi la somma di un numero sufficientemente grande di processi stazionari e ripetitivi (ognuno con

---


$$E(T) = \sum_{t=0}^{\infty} tP\{T = t\} = \sum_{t=0}^{\infty} tP_T(t)$$

una distribuzione arbitraria dell'intervallo tra gli eventi successivi) tende ad assumere una distribuzione di Poisson (\*).

In questa parte della trattazione si vuole illustrare la citata distribuzione nei suoi aspetti fondamentali ed in particolare riferita all'analisi degli arrivi presso un punto di servizio.

Sappiamo che il tasso medio di arrivo presso il sistema è rappresentato da  $\lambda$ .

Inoltre, la seguente espressione:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad (1.4.57)$$

con  $k \geq 0$ ;  $t \geq 0$

rappresenta la probabilità che *nell'intervallo di tempo tra 0 e t* avvengano *esattamente n arrivi*. E' chiaro che, essendo il tasso medio di arrivo per unità di tempo  $\lambda$ , **la media degli arrivi in un intervallo di tempo di lunghezza t è pari a  $\lambda t$** .

Riprendendo la 1.4.57 si ottiene che:

$$\begin{aligned} E(k) &= \sum_{k=0}^{\infty} k P_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = & (1.4.58) \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{(k-1)!} = \\ &= e^{-\lambda t} \lambda t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{(k)!} \end{aligned}$$

sapendo che:

---

(\*) Ref. Leonard KLEINROCK - Queueing systems (vol. I) - pag.61 - Wiley Interscience N.Y. 1975

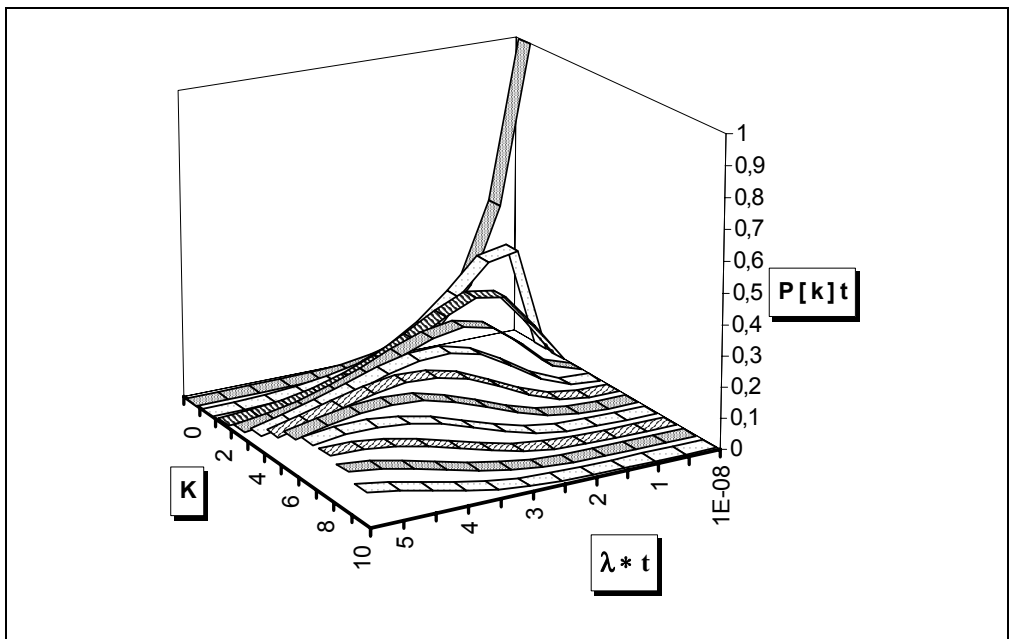
$$e^{-\lambda t} = \left( 1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2} + \frac{(\lambda t)^3}{6} + \dots + \frac{(\lambda t)^n}{n!} + \dots \right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(\lambda t)^k} \quad (1.4.59)$$

dalla 1.4.58 si ottiene che:

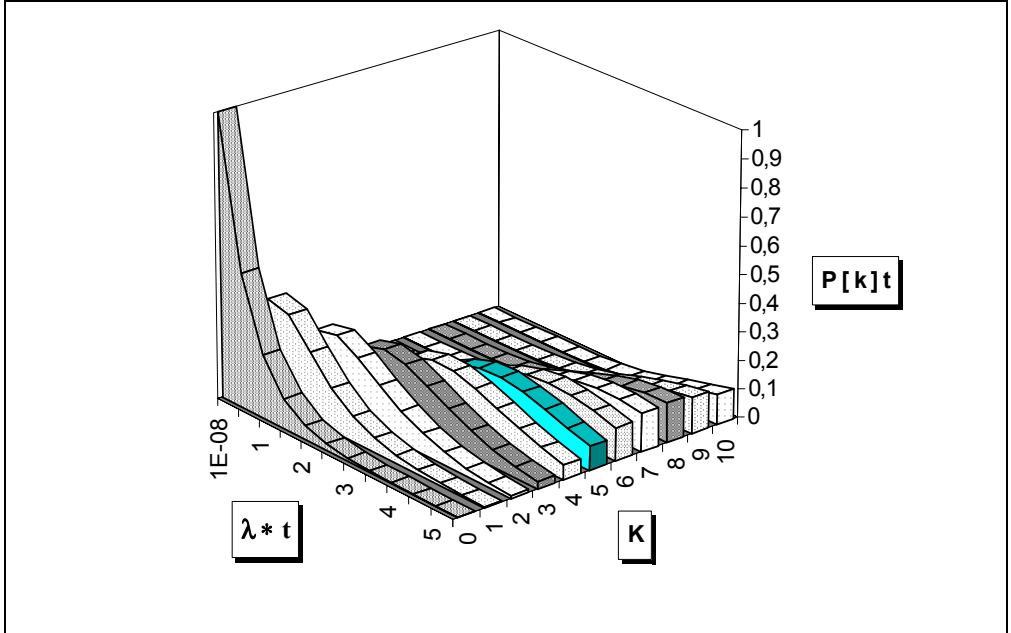
$$E(k) = \lambda t \quad (1.4.60)$$

Le seguenti figure n. 1.10 A e B rappresentano quindi graficamente la distribuzione di Poisson la cui funzione è la 1.4.57.

*Figura n. 1.10 / A*  
**La distribuzione di Poisson - esempio con  $\lambda=1,5$**



**Figura n. 1.10 / B**  
**La distribuzione di Poisson - esempio con  $\lambda=1,5$**

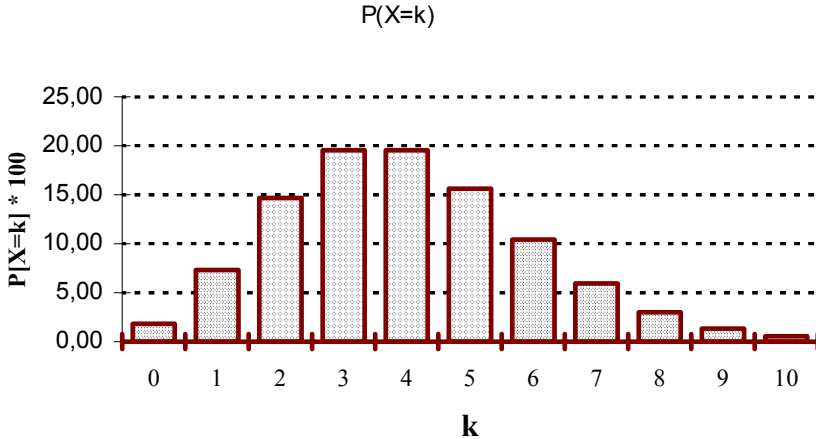


Una volta prefissato un intervallo di tempo e quindi posto  $t = 1$  si ottiene una distribuzione di Poisson la cui distribuzione di probabilità è rappresentata dalla seguente espressione che identifica la probabilità che, nell'intervallo di tempo prefissato, avvengano esattamente  $k$  arrivi:

$$P\{X = k\} = P_X(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad (1.4.61)$$

e che può essere rappresentata dal seguente grafico (ponendo sempre un valore ipotetico di  $\lambda = 4$ ):

*Figura n. 1.11 -  
Distribuzione di Poisson con  $\lambda=4$*



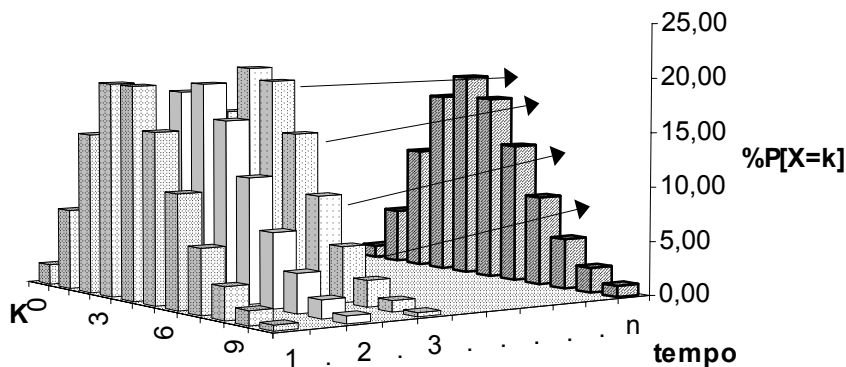
Nel momento in cui si ipotizza che il sistema di code abbia raggiunto lo stato stazionario e quindi che:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = 0 \quad (1.4.61)$$

si ottiene di conseguenza che la rappresentazione grafica della distribuzione di Poisson *dipende solo dal parametro  $\lambda$*  e non da  $t$ . Il considerare l'evoluzione della distribuzione nel tempo, in ipotesi di stazionarietà, dovrebbe quindi portare a rappresentazioni grafiche pressoché identiche o comunque simili. Le rette che uniscono i valori sperimentali di  $P_n(t)$  nel tempo dovrebbero quindi avere una derivata prima prossima allo zero.

La seguente figura 12 servirà a farci meglio comprendere quanto appena esposto.

*Figura n. 1.12*  
*Esempio di evoluzione della distribuzione di Poisson nel tempo*



dove:            con tempo = 1             $\lambda = 4$   
                       con tempo = 2             $\lambda = 4,2$   
                       con tempo = 3             $\lambda = 3,8$   
                       con tempo = n             $\lambda = 4,5$

Sarà quindi compito dello sperimentatore decidere in merito all'accettabilità o meno dell'ipotesi di stazionarietà del sistema sulla base dei dati a suo tempo raccolti ed elaborati. L'esame degli arrivi presso un sistema deve inoltre permetterci, in via collaterale, di individuare eventualmente quei periodi che devono essere trattati separatamente, non rientrando nell'ipotesi di stazionarietà del sistema.

#### **1.4.8 - La distribuzione esponenziale.**

Come già si è accennato nel corso della presente trattazione, la distribuzione esponenziale è strettamente legata alla distribuzione di *Poisson*. In effetti, nel momento in cui viene verificata l'ipotesi che gli arrivi presso un certo punto di servizio abbiano una distribuzione poissoniana ciò significa anche che, presso lo stesso punto di servizio,

la distribuzione dell'intervallo tra un arrivo ed il successivo è di tipo esponenziale.

Come abbiamo visto quindi il fenomeno degli arrivi presso un sistema può essere analizzato sia considerando il numero di eventi in un certo intervallo di tempo prefissato sia considerando gli intervalli di tempo intercorrenti tra un arrivo ed il successivo.

Ma la distribuzione esponenziale può ben adattarsi anche a descrivere i tempi di servizio ed in particolar modo in quei sistemi dove le operazioni più frequenti sono quelle che richiedono tempi di servizio sempre più brevi. E' il caso tipico di quelle strutture dove le procedure e le prassi di servizio sono fortemente standardizzate con una prevalenza di operazioni con tempi relativamente brevi e dove progressivamente meno frequenti sono le operazioni più complesse e con tempi di servizio più lunghi. In tali situazioni, nella maggioranza dei casi, può essere accettata l'ipotesi di una distribuzione esponenziale dei tempi di servizio.

Consideriamo ora gli arrivi ed in particolar modo l'espressione  $Z(t)$  che definisce la probabilità che il tempo intercorrente tra due arrivi sia minore o uguale a  $t$  quindi:

$$Z(t) = 1 - P\left[\bar{t} > t\right] \quad (1.4.62)$$

Sapendo ora che  $P\left[\bar{t} > t\right]$  è esattamente la probabilità che non si verificino arrivi nell'intervallo  $(0, t)$  e può essere quindi scritta come  $P_n(t)$ , si ottiene:

$$Z(t) = 1 - P_0(t) \quad (1.4.63)$$

ed utilizzando la 1.4.57:

$$Z(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (1.4.64)$$

che rappresenta la *funzione cumulativa di densità* della distribuzione esponenziale per valori di  $t$  maggiori o uguali a zero.

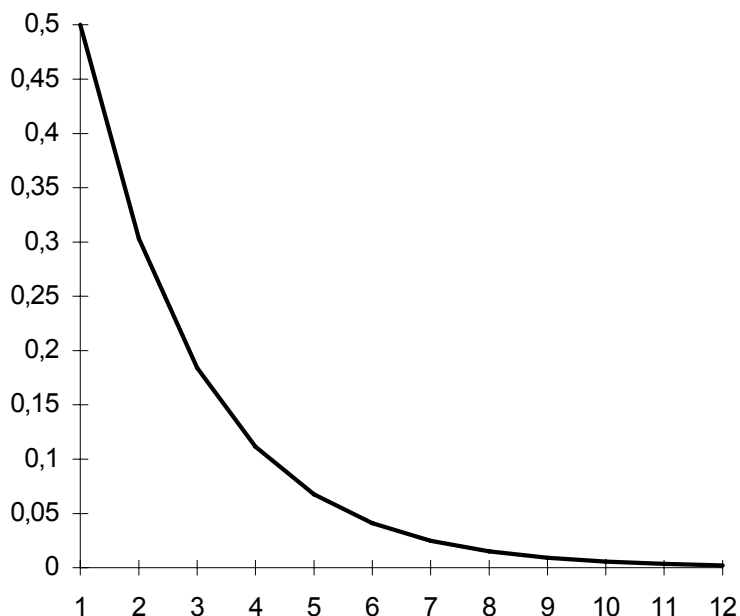
Dalla precedente espressione e differenziando si ottiene la funzione di densità della distribuzione esponenziale:

$$f_z(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases} \quad (1.4.65)$$

dove  $\lambda$  può essere anche sostituita con  $\mu$  qualora si analizzino i tempi di servizio in luogo degli arrivi.

La seguente figura illustra la rappresentazione grafica della distribuzione in esame.

*Figura n. 1.13*  
*La distribuzione esponenziale -esempio con  $\lambda = 0,5$*



L'intercetta sull'asse delle ordinate è data dai valori di  $\lambda$  o  $\mu$  che identificano il tasso di arrivo o il tasso di uscita dal sistema.

**La distribuzione esponenziale beneficia della proprietà di Markov** ossia della mancanza di memoria. In altre parole il processo ricomincia da zero dopo ogni evento e gli eventi passati non influiscono sulla probabilità degli eventi futuri.

#### **1.4.9 - La distribuzione di Erlang.**

La distribuzione esponenziale, trattata nella precedente sezione, può essere vista come un caso particolare della distribuzione di *Erlang* la cui funzione di densità è rappresentata dalla seguente espressione:

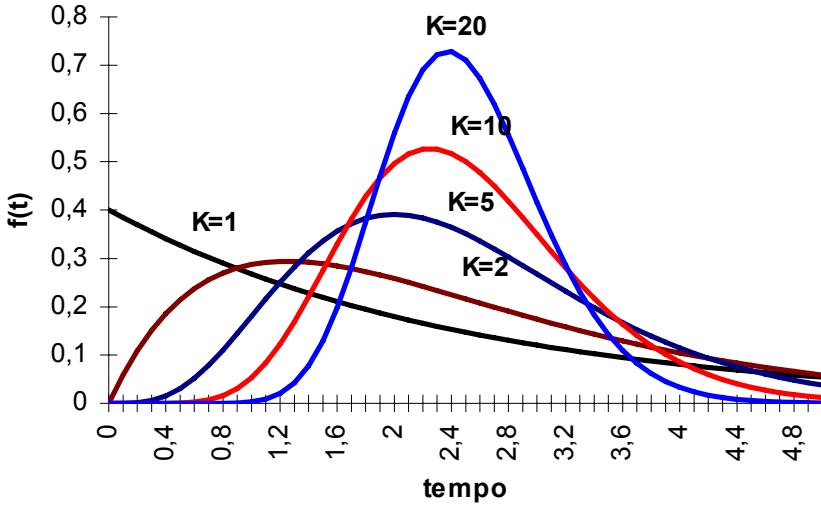
$$f(t) = \frac{(\mu k)^k}{(k-1)!} t^{(k-1)} e^{-k\mu t} \quad (1.4.66)$$

per valori di  $t > 0$  e con parametro  $k$  *intero e positivo*.

Come si può facilmente vedere, la funzione di densità di *Erlang* diventa una distribuzione esponenziale nel momento in cui  $k = 1$ .

La figura 1.14 che segue illustra l'evoluzione della distribuzione di Erlang al variare del parametro  $k$ .

*Figura n. 1.14*  
*(La distribuzione di Erlang per valori di  $k$  crescenti;*  
*esempio con  $\mu = 0,4$ )*



Si nota quindi che la distribuzione in analisi può ben adattarsi a descrivere i tempi di servizio presso un sistema.

Potendo adattare la distribuzione a quella che è la realtà osservata, operando sul parametro  $k$ , si può così meglio individuare un modello di code che ben si adatta a descrivere il processo in analisi.

L'individuazione del citato parametro  $k$  può essere effettuata ricorrendo al metodo della minimizzazione dello scarto quadratico tra i valori osservati direttamente ed i valori teorici delle distribuzioni di Erlang, considerando valori di  $k$  via via crescenti. Chiaramente, per gli arrivi si considereranno gli intertempi di arrivo mentre per i servizi si considereranno i tempi di servizio. Nell'uno e nell'altro caso comunque ad ogni valore verrà associata una frequenza relativa ricavabile dalle osservazioni effettuate.

Il processo di ricerca del parametro  $k$  ottimale può essere illustrato nel modo seguente (tenuto presente che generalmente vengono assegnati a  $k$  valori interi e positivi):

- a) si determinano i valori di  $\lambda$  o  $\mu$  sulla base dei dati rilevati sperimentalmente presso un posto di servizio;
- b) per ogni intervallo di tempo prefissato si determinano le rispettive *frequenze relative* ricavabili sempre dai dati sperimentali;
- c) fissato  $k = 1$  si calcola la somma degli scarti quadratici tra i valori teorici delle probabilità della distribuzione di *Erlang* ed i valori direttamente presso il sistema oggetto dell'osservazione;
- d) si incrementa  $k$  di una unità e si calcola di nuovo la somma degli scarti quadratici tra le probabilità teoriche di Erlang e quelle sperimentali;
- e) si confronta il risultato del punto *c* con quello del punto *d*:
  - se il valore del punto **d** > **c** il valore di  $k$  del punto **c** è quello ottimale;
  - in caso contrario si procede come segue:
- f) si ritorna al punto **c** incrementando  $k$  di una unità;
- g) si prosegue passando al punto **d** incrementando sempre  $k$  di una unità;
- h) e si passa quindi al riesame del punto **e**.

Come si vede, il processo si ferma comunque al punto “**e**” e nel momento in cui un ulteriore incremento di  $k$  di una unità [da  $k^*$  a  $(k^* + 1)$ ] porta a determinare una somma degli scarti quadratici tra i valori teorici e quelli sperimentali superiore rispetto a quella ottenuta col precedente valore di  $k^*$  il quale diventa quindi il **parametro ottimale**.

Nelle pagine che seguiranno verranno analizzati modelli che si basano sull'ipotesi dei tempi di servizio distribuiti secondo *Erlang*.

## 1.5 - ALCUNI MODELLI DI CODE

### 1.5.1 - Premessa.

Verranno ora presentati quelli che possiamo definire, sotto certi aspetti, i modelli classici della teoria delle code e che trovano più frequente applicazione.

Distingueremo **modelli ad un solo punto di servizio (s=1) e quelli a più punti di servizio (s>1)**.

### 1.5.2 - Modello con s=1, arrivi secondo Poisson e tempi di servizio esponenziali - M/M/1.

Quello che andiamo ora ad analizzare è uno dei più classici modelli di code in quanto nasce dalla combinazione del processo di sole nascite con quello di sole uscite, già visti in precedenza, ed è conosciuto anche come **modello M/M/1**.

Anche in questo caso viene ipotizzato che:

$$\lambda_n = \lambda \text{ per } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.5.1)$$

$$\mu_n = \mu \text{ per } n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.5.2)$$

Più che ricercare le soluzioni nello stato transitorio, operazione tra l'altro di una certa complessità, si cercherà in questa sede di illustrare le soluzioni nello stato stazionario che sono già state introdotte nella precedente sezione 1.4.

Riprendendo l'espressione (1.4.54) e considerando le 1.5.1 e 1.5.2 si ottiene:

$$P_0 = \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=0}^{n-1} \mu_{i+1}} \right]^{-1} = \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right]^{-1} = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right]^{-1} \quad (1.5.3)$$

Come si può chiaramente vedere l'espressione di sommatoria presente nell'ultima notazione identifica una serie geometrica di ragione  $\frac{\lambda}{\mu}$  la quale converge solo se  $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ . **Condizione essenziale quindi, affinché una coda non esploda, è che sia:**

$$\frac{\lambda}{\mu} = \rho < 1 \quad (1.5.4)$$

dove  $\lambda/\mu$  identifica come ben sappiamo il **fattore di utilizzazione del sistema**.

Dalla 1.5.3 si ottiene quindi:

$$P_0 = \left[ \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} \right]^{-1} = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \quad (1.5.5)$$

Per valori di  $n > 0$ , riprendendo l'espressione 1.4.50 si ottiene:

$$P_n = P_0 \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=0}^{n-1} \mu_{i+1}} = P_0 \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n \quad (1.5.6)$$

e sostituendo con la 1.5.5:

$$P_n = (1 - \rho) \rho^n \quad (1.5.7)$$

L'evoluzione del valore di  $P_n$  all'aumentare di  $n$  viene illustrato dalla seguente figura n. 1.15 dove a  $\rho$  viene assegnato valore di 0,4.

*Figura n. 1.15*  
***Evoluzione della probabilità di stato - ipotesi con  $\rho = 0,4$***

<b>n</b>	<b>P(n)</b>
0	0,600
1	0,240
2	0,096
3	0,038
4	0,015
5	0,006
6	0,003

Calcolando il valore atteso di  $P_n$  si determina la ***lunghezza della linea*** (incluse le unità che si stanno servendo), per cui:

$$E(P_n) = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = L \quad (1.5.8)$$

e quindi:

$$\begin{aligned} L &= \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n = \\ &= (1-\rho)\rho \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{(n-1)} \end{aligned} \quad (1.5.9)$$

Tenendo presente che:

$$\frac{d\rho^n}{d\rho} = n\rho^{(n-1)} \quad (1.5.10)$$

si ottiene:

$$L = (1-\rho)\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d\rho^n}{d\rho} = \quad (1.5.11)$$

$$= (1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \right)$$

Come già visto per l'espressione 1.5.3 anche la 1.5.11 contiene una sommatoria che identifica una serie geometrica la quale converge solo per valori di  $\rho < 1$ .

Si ottiene quindi:

$$L = (1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho} \left( \frac{1}{1-\rho} \right) = \quad (1.5.12)$$

$$= (1-\rho)\rho \left[ \frac{1}{(1-\rho)^2} \right] = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = L$$

In maniera simile è possibile procedere nell'analisi della lunghezza della coda (escluse quindi le unità che si stanno servendo).

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)P_n = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n - \sum_{n=1}^{\infty} P_n \quad (1.5.13)$$

e sapendo che:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n + P_0 = 1 \quad (1.5.14)$$

e quindi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1 - P_0 \quad (1.5.15)$$

dalla 1.5.8 e 1.5.13 si ottiene:

$$\begin{aligned}L_q &= L - (1 - P_0) = & (1.5.16) \\ &= L - 1 + P_0\end{aligned}$$

e sostituendo con la 1.5.5 e la 1.5.12 si ottiene:

$$\begin{aligned}L_q &= \frac{\lambda}{\mu - \lambda} - \frac{\lambda}{\mu} = & (1.5.17) \\ &= \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}\end{aligned}$$

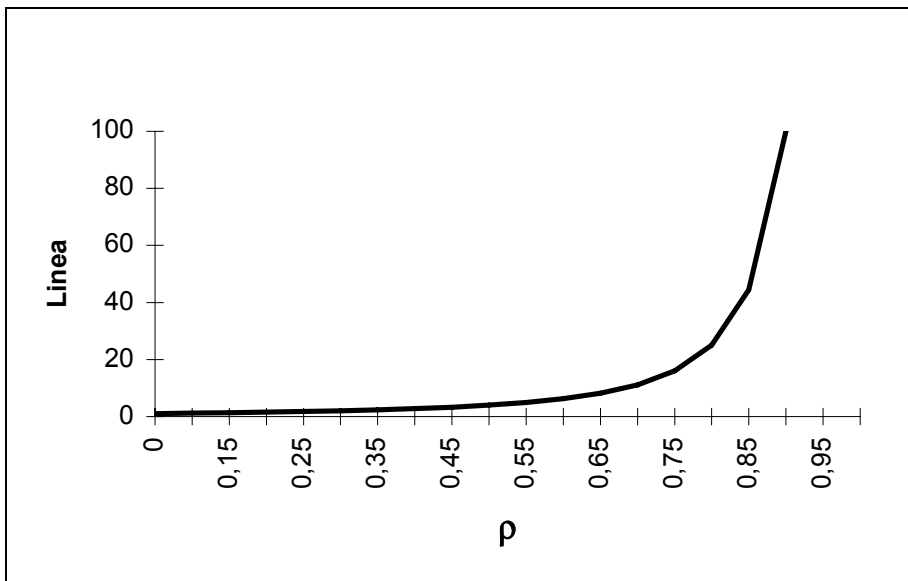
Come si può notare quindi, condizione essenziale affinché si possa arrivare a determinare una soluzione del modello è che **il tasso di arrivo presso il sistema sia strettamente inferiore al tasso di servizio**. Non può nemmeno essere accettata l'ipotesi del tasso di arrivo uguale al tasso di servizio perché, in tale circostanza, i ritardi tenderebbero a sommarsi e la coda di conseguenza ad esplodere.

Può essere facilmente calcolato anche il valore della varianza del numero di unità presenti nel sistema:

$$\sigma_L^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n - L)^2 P_n = \frac{\rho}{(1 - \rho)^2} \quad (1.5.18)$$

Al fine di meglio comprendere il legame esistente tra la il numero di unità presenti nel sistema e  $\rho$  si consideri la seguente rappresentazione grafica:

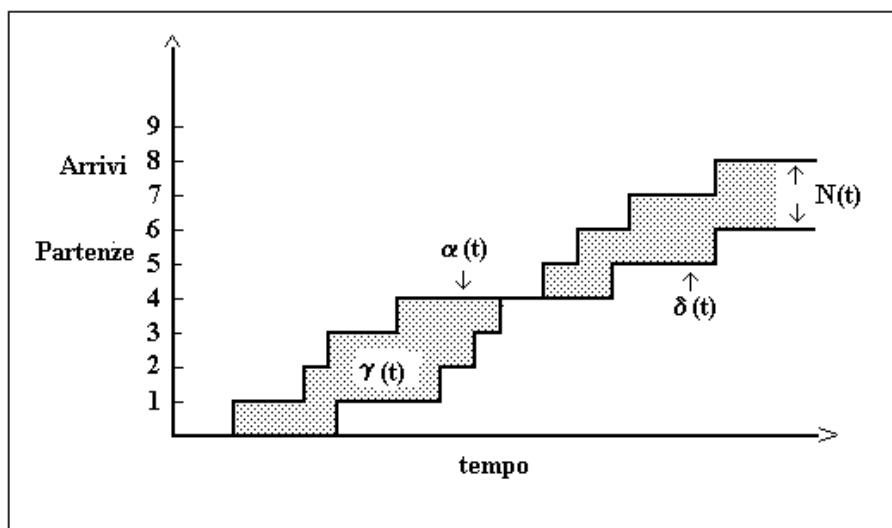
*Figura n. 1.16*  
*Evoluzione della linea d'attesa rispetto al parametro  $\rho$*



Come si può vedere, al tendere di  $\rho$  a **1**, la lunghezza della linea tende ad infinito.

A completamento dell'analisi del modello introdotto si consideri ora la seguente figura.

*Figura n. 1.17*  
**Il processo di arrivi e partenze**  
 - fonte: L. Kleinrock - *Queueing systems*



Analizzando la figura 17 appena riportata emerge quanto segue:

- $\gamma(t)$  identifica il tempo cumulativo di permanenza nel sistema delle unità arrivate sino al tempo  $t$ ;
- $\alpha(t)$  identifica il numero di arrivi nell'intervallo di tempo da 0 a  $t$ ;
- $\delta(t)$  identifica il numero di partenze nell'intervallo di tempo da 0 a  $t$ ;

di conseguenza:

- $N(t)$  identifica il numero di unità presenti nel sistema al tempo  $t$  e quindi:

$$N(t) = \alpha(t) - \delta(t) \quad (1.5.19)$$

E' possibile, a questo punto, definire il tasso medio di arrivo al tempo  $t$  che è dato dalla seguente espressione:

$$\lambda_t = \frac{\alpha(t)}{t} \quad (1.5.20)$$

ed analogamente il *tempo medio di presenza nel sistema al tempo  $t$*  che è dato da:

$$T_t = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)} \quad (1.5.21)$$

Si può ora facilmente ricavare  $N_t$  *numero medio di unità presenti nel sistema nell'intervallo di tempo da 0 a  $t$*  che è dato dalla seguente espressione:

$$N_t = \frac{\gamma(t)}{t} \quad (1.5.22)$$

sostituendo con la 1.5.20 e la 1.5.21 si ottiene:

$$N_t = \frac{\alpha(t)T_t}{t} = \frac{\lambda_t t T_t}{T} = \lambda_t T_t \quad (1.5.23)$$

Sapendo ora che l'ipotesi di stazionarietà implica che esistano e siano finiti i seguenti limiti:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t = \lambda \quad (1.5.24)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T_t = T \quad (1.5.25)$$

quindi:

$$N = \lambda T \quad (1.5.26)$$

Da quest'ultima espressione, risalendo al significato della terminologia adottata, si possono riconoscere i seguenti valori:

- $N = \text{numero medio di unità presenti nel sistema} = L$
- $T = \text{tempo medio di permanenza nel sistema} = W$

di conseguenza si ottiene che:

$$L = \lambda W \quad (1.5.27)$$

e quindi:

$$W = \frac{L}{\lambda} \quad (1.5.28)$$

Sostituendo con la 1.5.12 si ottiene:

$$W = \left( \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \right) \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (1.5.29)$$

Ricordando ora che  $W_q$  (tempo di attesa nella coda) non è altro che il tempo di attesa nella linea (o sistema) dedotto il tempo medio di servizio, si ottiene facilmente:

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)\mu} = W_q \quad (1.5.30)$$

Gli stessi risultati possono essere ottenuti percorrendo la seguente via alternativa.

Si consideri la distribuzione di probabilità del tempo di attesa  $T$ . Sapendo che:

$$P[T > t] = e^{-\mu(1-\rho)t} \quad (1.5.31)$$

la funzione di densità della variabile casuale  $T$  è data dalla seguente espressione:

$$f(t) = \mu(1-\rho)e^{-\mu(1-\rho)t} \quad \text{per } t \geq 0 \quad (1.5.32)$$

La 1.5.32 non è altro che la funzione di densità di una distribuzione esponenziale con parametro  $\mu(1-\rho)$ . Si determina quindi che:

$$W = E(T) = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda} \quad (1.5.33)$$

che è lo stesso risultato evidenziato dalla 1.5.29.

Con l'identificazione della lunghezza attesa della linea e della coda e dei rispettivi tempi di attesa si è così completata la presentazione del modello.

### **1.5.3 - Modello con $s = 1$ , arrivi secondo Poisson e tempi di servizio secondo Erlang.**

Consideriamo ora un modello che trova frequente applicazione soprattutto quando si vanno ad analizzare sistemi in cui il servizio può essere scorporato in più compiti o fasi ripetitive.

In un posto di servizio dove vengono effettuate  $k$  operazioni successive la cui durata di ciascuna è una variabile casuale con distribuzione esponenziale, la variabile casuale **tempo totale di servizio** avrà una distribuzione di **Erlang**.

La seguente espressione identifica la funzione di densità della citata distribuzione di probabilità:

$$f(t) = \frac{(\mu k)^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-k\mu t} \quad (1.5.34)$$

dove  $\mu$  e  $k$  identificano i parametri della distribuzione i quali assumono solo valori positivi;  $k$  inoltre assume generalmente solo valori interi.

La media della distribuzione è data da  $\frac{1}{\mu}$  mentre la varianza è pari a  $\frac{1}{k}$ .

*k* è il parametro che determina la dispersione della distribuzione.

Il modello è molto importante per le sue possibilità applicative offerte dalla distribuzione di *Erlang*. La possibilità di poter adattare la curva della funzione di densità alla realtà oggetto dell'analisi può permettere allo sperimentatore di trovare una migliore compatibilità dello strumento d'analisi al problema, verificando anche possibilità di ulteriori applicazioni ad ipotesi alternative permettendo quindi una più completa analisi del sistema.

Le seguenti espressioni identificano gli **output** del modello analizzato:

$$W_q = \frac{(1+k)}{2k} \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \quad (1.5.35)$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \left[ \frac{(1+k)}{2k} \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \right] + \frac{1}{\mu} \quad (1.5.36)$$

$$\begin{aligned} L_q &= \frac{\lambda^2 \frac{1}{k\mu^2} + \rho}{2(1-\rho)} = \frac{\lambda^2 \left( \frac{1}{k} + 1 \right)}{2 \left( \frac{\mu-\lambda}{\mu} \right)} = \\ &= \frac{\lambda^2}{\mu^2} \frac{1+k}{k} \frac{1}{2} \frac{\mu}{(\mu-\lambda)} = \frac{\lambda^2(1+k)}{2k(\mu-\lambda)\mu} \end{aligned} \quad (1.5.37)$$

$$L = \lambda W = \lambda \left( W_q + \frac{1}{\mu} \right) = \tag{1.5.38}$$

$$= \lambda \left[ \frac{(1+k)\lambda}{2k(\mu-\lambda)\mu} + \frac{1}{\mu} \right] = \left[ \frac{(1+k)\lambda^2}{2k(\mu-\lambda)\mu} \right] + \rho$$

#### **1.5.4 - Modello con $s = 1$ , arrivi secondo Poisson e lunghezza massima della coda limitata a $K$ - (M/M/1/K).**

Frequentemente accade di dover analizzare dei sistemi di code dove viene assunto, come presupposto fondamentale, che il numero di unità presenti in coda non debba mai superare un certo valore  $K$ .

Detto valore  $K$  può emergere da scelte soggettive come può essere la conseguenza oggettiva derivante della particolare struttura del sistema che non permette di accogliere o trattenere in coda un numero di unità superiore a  $K$ .

Il centro di rianimazione di un ospedale, che non può accogliere un numero di degenti superiore ai propri posti letto, può essere considerato un esempio classico che ci può facilmente aiutare a comprendere il modello in analisi.

E' chiaro quindi che, sulla base delle ipotesi del modello, tutte le unità in arrivo che trovano il sistema allo stato  $K$  non saranno accettate e dovranno rinunciare alla richiesta di servizio oppure dovranno essere dirottate su altre unità. Condizione essenziale quindi affinché una unità in arrivo possa entrare nel sistema di code è che nel momento in cui si verifica l'arrivo il sistema si trovi nello stato  **$n$  con  $n < K$** .

Gli arrivi si verificheranno secondo un processo di *Poisson* finché il sistema non raggiunge lo stato  $K$ .

Il modello può essere molto facilmente ricollegato al processo di nascita-morte già visto in precedenza con la sola differenza che la lunghezza della coda non potrà superare un determinato valore  $K$ .

Nel nostro caso avremo quindi:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{per } n < K \\ 0 & \text{per } n \geq K \end{cases} \quad (1.5.39)$$

ed inoltre

$$\mu_n = \mu \text{ per } n = 1, 2, 3, 4, \dots, K \quad (1.5.40)$$

Analogamente a quanto già visto nel par. 4.6 si ottiene quanto segue:

$$P_n = P_0 \frac{\prod_{i=0}^{k-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^n \mu_i} \text{ per } n \leq K \quad (1.5.41)$$

e riprendendo la 1.5.39 e 1.5.40 si ottiene:

$$P_n = P_0 \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^k \text{ per } n \leq K \quad (1.5.42)$$

ed inoltre:

$$P_n = 0 \text{ per } n > K \quad (1.5.43)$$

Risolvendo per  $P_0$  e riprendendo la 1.4.54 si ottiene (\*):

---

(\*) Si ricordi che la somma di  $n$  numeri ( $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ) in progressione

geometrica, di ragione  $q \neq 0$  è pari a:  $a_1 \left( \frac{1 - q^n}{1 - q} \right)$

$$\begin{aligned}
 P_0 &= \left[ 1 + \sum_{n=1}^K \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right]^{-1} = & (1.5.44) \\
 &= \left[ 1 + \frac{\frac{\lambda}{\mu} \left[ 1 - \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^K \right]}{1 - \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)} \right]^{-1}
 \end{aligned}$$

e quindi, con semplici passaggi, si ottiene:

$$P_0 = \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^{(K+1)}} \quad (1.5.45)$$

Si ottiene di conseguenza quanto segue:

$$P_n = \begin{cases} \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^{(K+1)}} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n & \text{per } 0 \leq n \leq K \\ \mathbf{0} & \text{altrove} \end{cases} \quad (1.5.46)$$

nel caso specifico in cui  $n = K$  si ottiene:

$$P_K = \frac{\lambda^K \mu - \lambda^{(K+1)}}{\mu^{(K+1)} - \lambda^{(K+1)}} \quad (1.5.47)$$

mentre per  $n = 0$  si ottiene:

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho^{K+1}} \quad (1.5.48)$$

Sapendo ora che  $L$  (lunghezza attesa della linea) è data dal valore atteso delle probabilità di stato e quindi:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n \quad (1.5.49)$$

si ottiene immediatamente:

$$\begin{aligned} L &= \sum_{n=0}^K n \left( \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{(K+1)}} \right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \quad (1.5.50) \\ &= \sum_{n=0}^K n \left( \frac{1-\rho}{1-\rho^{(K+1)}} \right) (\rho)^n \end{aligned}$$

essendo  $P_n = 0$  quando  $n > K$ .

Sapendo ora che:

$$n\rho^n = \rho n\rho^{(n-1)} = \rho \frac{d\rho^n}{d\rho} \quad (1.5.51)$$

dalla 1.5.50 si ottiene:

$$L = \left( \frac{1-\rho}{1-\rho^{(K+1)}} \right) \rho \sum_{n=0}^K \frac{d\rho^n}{d\rho} = \quad (1.5.52)$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{1-\rho}{1-\rho^{(K+1)}} \right) \rho \frac{d}{d\rho} \sum_{n=0}^K \rho^n = \\
&= \left( \frac{1-\rho}{1-\rho^{(K+1)}} \right) \rho \frac{d}{d\rho} \left( \frac{1-\rho^{(K+1)}}{1-\rho} \right) = \\
&= \left( \frac{1-\rho}{1-\rho^{(K+1)}} \right) \rho \left( \frac{-(K+1)\rho^K(1-\rho) + 1 - \rho^{(K+1)}}{(1-\rho)^2} \right) = \\
&= \rho \left( \frac{-(K+1)(\rho^K - \rho^{(K+1)}) + 1 - \rho^{(K+1)}}{(1-\rho)(1-\rho^{(K+1)})} \right) = \\
&= \rho \left( \frac{-(K+1)\rho^K + K\rho^{(K+1)} + 1}{(1-\rho)(1-\rho^{(K+1)})} \right) = \\
&= \left( \frac{\rho}{1-\rho} \right) - \left( \frac{(K+1)\rho^{(K+1)}}{1-\rho^{K+1}} \right) = L
\end{aligned}$$

e sapendo che, per ipotesi,  $s = I$  si ottiene facilmente anche la **lunghezza della coda** che è data da:

$$L_q = L - (1 - P_0) = \quad (1.5.53)$$

$$= \left[ \left( \frac{\rho}{1-\rho} \right) - \left( \frac{(K+1)\rho^{(K+1)}}{1-\rho^{K+1}} \right) \right] + \left( \frac{1-\rho}{1-\rho^{(K+1)}} \right) - 1$$

Riprendendo ora l'espressione 1.5.27 ( $L = \lambda W$ ) si può procedere alla determinazione dei tempi di attesa nel sistema.

$$W = \frac{L}{\lambda} = \left[ \left( \frac{\rho}{1-\rho} \right) - \left( \frac{(K+1)\rho^{(K+1)}}{1-\rho^{K+1}} \right) \right] \frac{1}{\lambda} \quad (1.5.54)$$

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = \left\{ \left[ \left( \frac{\rho}{1-\rho} \right) - \left( \frac{(K+1)\rho^{(K+1)}}{1-\rho^{K+1}} \right) \right] \frac{1}{\lambda} \right\} - \frac{1}{\mu} \quad (1.5.55)$$

ricordando che  $1/\lambda$  e  $1/\mu$  rappresentano rispettivamente *l'intertempo atteso di arrivo* ed il *tempo atteso di servizio*.

### **1.5.5 - Modello con $s=1$ e popolazione finita - $M/M/1/M$ .**

Il modello che andremo ad analizzare impone una importante limitazione: non vi è più una popolazione infinita di utenti che arrivano secondo un processo poissoniano ma le potenziali unità in arrivo sono in numero finito e pari ad  $M$ .

Ora, sappiamo che ognuna delle  $M$  unità che forma la popolazione dei potenziali utenti può trovarsi fuori dal sistema (in fase di arrivo) oppure dentro il sistema in attesa del servizio..

In particolare, come già visto nel processo di nascita-morte e nel processo di sole entrate, si assume che il tempo che ogni unità trascorre in attesa di servizio abbia una distribuzione esponenziale con media  $1/\lambda$  mentre il tempo di servizio ha anch'esso una distribuzione esponenziale con media  $1/\mu$ .

Come si vede la struttura del modello è caratterizzata da una precisa delimitazione dell'universo e del contesto nel quale viene svolta l'analisi. L'aver definito in  $M$  il numero di unità che forma la popolazione degli utenti ci permette contestualmente di definire anche la lunghezza massima della coda che non può chiaramente superare il citato valore  $M$ . In tale contesto il modello in analisi assomiglia, sotto certi aspetti, a quello analizzato nella sezione precedente.

Un esempio ci potrà meglio aiutare a comprendere il modello in esame. Si consideri un elaboratore elettronico centrale al quale sono

collegati un determinato numero  $M$  di terminali. Da ogni terminale può partire la richiesta di utilizzo di parte delle risorse dell'elaboratore centrale. Quando il terminale non è attivo esso è quindi fuori dal sistema mentre nel momento in cui si connette con l'elaboratore centrale (ad es. con una procedura in *time sharing*) entra automaticamente nella linea di attesa.

Supponiamo ora che un'unità si trovi fuori dal sistema al tempo  $t$ . Sappiamo che la probabilità che detta unità possa entrare nel sistema nell'intervallo di tempo  $(t, t + \Delta t)$  è pari a  $[\lambda \cdot \Delta t + o(\Delta t)]$ . In maniera analoga, supposto che un'unità si trovi dentro il sistema e sotto servizio al tempo  $t$ , sappiamo che la probabilità che questa abbia terminato il servizio al tempo  $(t + \Delta t)$  pari a  $[\mu \Delta t + o(\Delta t)]$ .

In tale contesto si assume che sia la distribuzione dei tempi di permanenza fuori dal sistema, sia quella dei tempi dentro il sistema, siano di tipo esponenziale con medie rispettivamente pari a  $1/\lambda$  e  $1/\mu$ .

Ora, quando nel sistema vi sono esattamente  $n$  unità in attesa di essere servite si deduce chiaramente che vi saranno esattamente  $(M - n)$  unità in attesa di entrare nel sistema e quindi la media totale dei tassi di arrivo è data da  $\lambda(M - n)$ .

Il modello che stiamo analizzando sarà di conseguenza caratterizzato dai seguenti parametri:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda(M - n) & \text{per } n = 0, 1, 2, 3, \dots, M \\ 0 & \text{per } n \geq M \end{cases} \quad (1.5.56)$$

$$\mu_n = \mu \text{ per } n = 1, 2, 3, \dots, M \quad (1.5.57)$$

Nell'ipotesi di stazionarietà del sistema di code si ottengono i seguenti risultati:

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^M \left[ \frac{M!}{(M-n)!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right] \right\}^{-1} \quad (1.5.58)$$

$$P_n = \left[ \frac{M!}{(M-n)!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right] P_0 \quad \text{per } n = 1, 2, 3, \dots, M \quad (1.5.59)$$

$$L_q = \sum_{n=1}^M (n-1)P_n = M - \left( \frac{\lambda + \mu}{\lambda} \right) (1 - P_0) \quad (1.5.60)$$

$$L = \sum_{n=0}^M nP_n = L_q + (1 - P_0) = M - \frac{\lambda}{\mu} (1 - P_0) \quad (1.5.61)$$

### **1.5.6 - Modello con $s > 1$ , arrivi secondo Poisson e tempi di servizio esponenziali - $M/M/m$ .**

Molto frequentemente i sistemi di code da analizzare sono caratterizzati dalla presenza di più punti di servizio ( $s > 1$ ).

Ora, l'applicabilità del modello che viene ora presentato si fonda sul presupposto fondamentale che le unità in arrivo possono indistintamente rivolgersi ad uno qualsiasi dei punti di servizio per effettuare le loro richieste. Classici esempi di tali sistemi sono i caselli autostradali, le biglietterie degli stadi o delle stazioni ferroviarie.

Qualora, pur in presenza di più punti di servizio, l'utente non possa scegliere autonomamente ed in maniera indipendente il punto di servizio al quale rivolgersi, il modello qui introdotto non sarà utilizzabile per l'analisi del sistema; trattasi di situazioni in cui i vari punti di servizio si differenziano tra di loro per il tipo di servizio offerto o perché ognuno riservato ad una particolare categoria di utenti. In questo caso può essere citato come esempio lo sportello bancario o un grosso ufficio postale con sportelli distinti per categorie di operazioni eseguibili.

Nel modello in analisi si ipotizza comunque che gli arrivi avvengano sempre secondo un processo di *Poisson* con parametro  $\lambda$ . Come già visto nel corso della presente trattazione, quest'ultima ipotesi implica automaticamente - come modo alternativo di esporre il problema - che gli intertempi di arrivo abbiano una distribuzione esponenziale con media  $1/\lambda$ .

Per quanto concerne i tempi di servizio l'ipotesi assunta che essi abbiano una distribuzione esponenziale con media  $1/\mu$ .

L'ipotesi riguardante i vari punti di servizio, come già citato, è che ognuno di essi sia strutturato in maniera identica e con le stesse capacità operative. Ne consegue che per ognuno degli  $s$  punti vi sarà una identica distribuzione di probabilità dei tempi di servizio e con identico parametro.

Per ognuna delle unità entranti in coda la scelta del punto di servizio non influirà quindi sulla durata del tempo del servizio stesso.

Ora, nel momento in cui si andrà a considerare il sistema in un certo stato  $n$ , dovranno essere distinte le seguenti due ipotesi:

- a) stato  $E_n$  con  $n < s$
- b) stato  $E_n$  con  $n \geq s$

Il tasso di servizio presso il sistema sarà quindi dato da:

$$\mu_n = \min[n\mu; s\mu] = \begin{cases} n\mu & \text{per } 0 \leq n \leq s \\ s\mu & \text{per } n > s \end{cases} \quad (1.5.62)$$

mentre si assume che il tasso di arrivo sia  $\lambda$  per ogni valore di  $n$  e quindi:

$$\lambda_n = \lambda \quad \text{per } n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.5.63)$$

Condizione essenziale affinché il processo di code non esploda è che:

$$\lambda < s\mu \quad (1.5.64)$$

Come si è certamente notato questo modello è strettamente legato all' $M/M/1$  introdotto nella sezione 1.5.1.

Riprendendo quindi l'espressione (1.5.6) e con le opportune sostituzioni si ottiene quindi:

per  $n < s$ :

$$\begin{aligned} P_n &= P_0 \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} = & (1.5.65) \\ &= P_0 \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

mentre per  $n \geq s$  si ottiene:

$$\begin{aligned} P_n &= P_0 \prod_{i=0}^{s-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} \prod_{j=s}^{n-1} \frac{\lambda}{s\mu} = & (1.5.66) \\ &= P_0 \prod_{i=0}^{s-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} \left( \frac{\lambda}{s\mu} \right)^{(n-s)} = \\ &= P_0 \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{1}{s! s^{(n-s)}} \end{aligned}$$

Si sono quindi ottenuti i seguenti risultati:

$$P_n = \begin{cases} P_0 \frac{(s\rho)^n}{n!} = P_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} & \text{per } n < s \\ P_0 \frac{\rho^n s^s}{s!} = P_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{s! s^{(n-s)}} & \text{per } n \geq s \end{cases} \quad (1.5.67)$$

tenuto presente che dovrà essere sempre verificata l'ipotesi che  $\rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1$ .

Riprendendo l'espressione (1.5.3) si determina:

$$P_0 = \left[ 1 + \sum_{n=1}^{s-1} \frac{(s\rho)^n}{n!} + \sum_{n=s}^{\infty} \frac{(s\rho)^n}{s!} \frac{1}{s^{(n-s)}} \right]^{-1} = \quad (1.5.68)$$

$$= \left[ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(s\rho)^n}{n!} + \left( \frac{(s\rho)^s}{s!} \right) \left( \frac{1}{1-\rho} \right) \right]^{-1}$$

Diventa a questo punto facile procedere nella determinazioni dei risultati del modello che sono essenziali per un suo pratico utilizzo. Si ottiene infatti:

sapendo che:

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s)P_n \quad (1.5.69)$$

$$L_q = \sum_{j=0}^{\infty} jP_{s+j} = \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} \rho^j P_0 = \quad (1.5.70)$$

$$\begin{aligned}
&= P_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} \rho \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d}{d\rho} (\rho^j) = \\
&= P_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} \rho \frac{d}{d\rho} \left( \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \right) = \\
&= P_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} \rho \frac{d}{d\rho} \left( \frac{1}{1-\rho} \right) = \\
&= \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \rho}{s!(1-\rho)^2} = \mathbf{L}_q
\end{aligned}$$

ed inoltre:

$$\mathbf{W}_q = \frac{\mathbf{L}_q}{\lambda} = \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \rho}{s!(1-\rho)^2} \left( \frac{1}{\lambda} \right) \quad (1.5.71)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_q + \frac{1}{\mu} = \left[ \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \rho}{s!(1-\rho)^2} \left( \frac{1}{\lambda} \right) \right] + \frac{1}{\mu} \quad (1.5.72)$$

$$\mathbf{L} = \left[ \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \rho}{s!(1-\rho)^2} \right] + \frac{\lambda}{\mu} \quad (1.5.73)$$

### ***1.5.7 - Alcune considerazioni finali sui modelli di code.***

Quelli ora illustrati possono essere considerati i più classici modelli di code che più frequentemente trovano concreta applicazione nell'analisi di sistemi reali.

Moltissimi altri sono i modelli che la teoria mette a disposizione dell'analista; la loro illustrazione supera però gli scopi di questa trattazione.

Tra i modelli che comunque rivestono una particolare importanza si vuole citare quelli a priorità il cui utilizzo è fondamentale nell'analisi di sistemi caratterizzati da particolari regole di servizio che privilegiano particolari categorie di utenti. Esempi classici sono il servizio di pronto soccorso presso un ospedale o le procedure di gestione dei flussi di messaggi presso un centro di elaborazione dati.

Alla luce di quanto sin qui esposto resta inteso comunque che la ricerca del giusto strumento teorico per analizzare un processo di entrata-uscita deve essere sempre fatta senza mai perdere di vista il costo che l'utilizzo di un determinato modello, anche estremamente sofisticato, può comportare.

Il verificare l'accettabilità di risultati, anche se approssimati, di modelli più semplici può infatti indurre lo sperimentatore a trascurare una ricerca più approfondita e costosa.

Quanto sopra vuole in sostanza ribadire il principio che la ricerca dello strumento teorico da utilizzare per una analisi deve essere sempre fatta tenendo presente il contesto nel quale la citata analisi viene condotta ed i benefici che da essa possono derivare.

## **1.6 - L'APPLICAZIONE DEI MODELLI DI CODE NELLA SPERIMENTAZIONE**

### ***1.6.1 - Alcune considerazioni.***

Come si può facilmente intuire, una delle caratteristiche essenziali dei modelli di code quella di essere **descrittivi**. L'utilizzo degli strumenti d'analisi qui introdotti non ci permette infatti di determinare

delle soluzioni ottimali al problema di base ma avremo tante soluzioni quante saranno le differenti ipotesi di sistema e di struttura che si vorranno considerare.

Sarà quindi compito dello sperimentatore sapere orientare la propria analisi in quella direzione che più agevolmente e con il minor spreco di risorse permette il raggiungimento degli obiettivi primari della ricerca.

Al fine di permettere al lettore di meglio comprendere il significato dei concetti sin qui introdotti nonché il valore e le modalità di utilizzo dei modelli presentati nel corso del presente lavoro, si procederà ora con un esempio concreto di analisi di un processo di code.

### **1.6.2 - Un esempio concreto.**

Si consideri un sistema rappresentato da uno sportello bancario.

Punto di partenza dell'analisi è la ricerca e la stima di quei parametri che saranno successivamente inseriti quali *input* del modello che sarà utilizzato per analizzare il processo di code. In tale contesto il primo passo sarà quindi lo studio degli arrivi presso il sistema al fine di verificare, in termini probabilistici, come questi si distribuiscano nel tempo.

Questo primo passo può essere illustrato dalla tabella di fig. 1.18 che definiremo ***tabella degli eventi***.

L'evoluzione della coda nel tempo può essere illustrata dal grafico di fig. 1.19 che riprende i dati della fig. n. 18.

A questo punto dovrà essere ricercata una distribuzione di probabilità teorica tale da poter essere accettata come rappresentativa, dal punto di vista statistico, dei fenomeni degli arrivi e dei tempi di servizio presso il sistema analizzato.

Come si può vedere dalla figura 19 il sistema evidenzia comunque una certa stazionarietà in quanto, analizzando anche la lunghezza della coda, risulta difficile individuare uno o più periodi della giornata in cui questa assume una particolare dimensione. L'esperienza insegna comunque che vi sono tipicamente presso uno sportello bancario o un

ufficio postale o anche presso un qualsiasi negozio, periodi della giornata o del mese in cui l'affluenza assume una particolare configurazione. Sarà comunque compito dello sperimentatore sapere individuare questi periodi al fine di isolarli dall'analisi globale ed eventualmente studiarli separatamente.

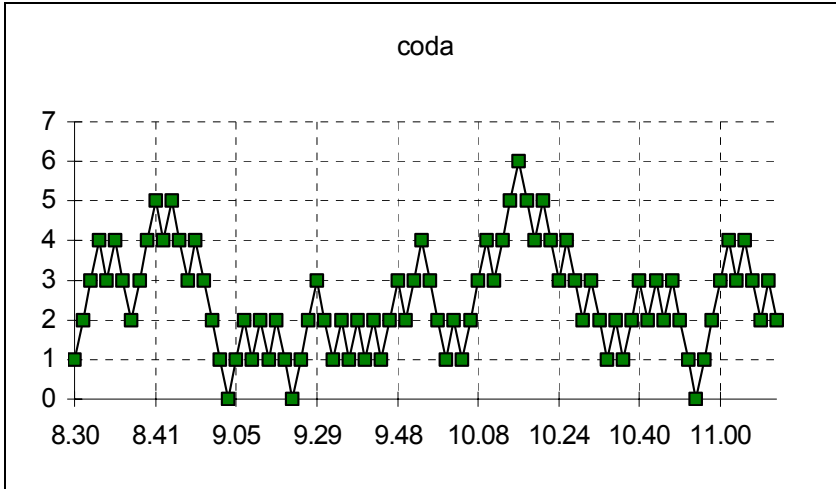
Il prossimo passo sarà quindi quello di raggruppare i dati relativi agli arrivi, per intervalli di tempo ed in maniera analoga raggruppare i dati relativi ai tempi di servizio per intervalli di tempo prefissati.

Per quanto concerne gli arrivi è opportuno ribadire che l'analisi può essere condotta non solo prendendo in considerazione il numero degli arrivi su intervalli di tempo prefissati ma anche considerando i tempi intercorrenti tra un arrivo ed il successivo e raggruppando opportunamente questi dati.

*Figura 1.18*  
*Arrivi-partenze: dati grezzi*

<b>ORA</b>	<b>arrivi</b>	<b>partenze</b>	<b>coda</b>	<b>ORA</b>	<b>arrivi</b>	<b>partenze</b>
8.30	1		1	9.55		1
8.31	1		2	9.58		1
8.32	1		3	10.01		1
8.33	1		4	10.03	1	
8.34		1	3	10.06		1
8.35	1		4	10.07	1	
8.36		1	3	10.08	1	
8.38		1	2	10.09	1	
8.39	1		3	10.10		1
8.40	1		4	10.12	1	
8.41	1		5	10.14	1	
8.43		1	4	10.15	1	
8.44	1		5	10.16		1
8.45		1	4	10.19		1
8.47		1	3	10.20	1	
8.48	1		4	10.21		1
8.51		1	3	10.24		1
8.54		1	2	10.25	1	
8.58		1	1	10.28		1
9.04		1	0	10.30		1
9.05	1		1	10.31	1	
9.09	1		2	10.34		1
9.10		1	1	10.35		1
9.12	1		2	10.36	1	
9.13		1	1	10.37		1
9.17	1		2	10.39	1	
9.19		1	1	10.40	1	
9.22		1	0	10.42		1
9.25	1		1	10.44	1	
9.28	1		2	10.47		1
9.29	1		3	10.49	1	
9.30		1	2	10.50		1
9.32		1	1	10.51		1
9.33	1		2	10.54		1
9.38		1	1	10.55	1	
9.40	1		2	10.58	1	
9.41		1	1	11.00	1	
9.43	1		2	11.01	1	
9.45		1	1	11.03		1
9.46	1		2	11.05	1	
9.48	1		3	11.08		1
9.49		1	2	11.10		1
9.51	1		3	11.12	1	
9.53	1		4	11.14		1

*Figura n. 1.19*  
*L'evoluzione della coda nel tempo*



Lo sperimentatore dovrà sapere valutare l'accettabilità o meno di ipotesi circa le distribuzioni degli arrivi e dei tempi di servizio. In tale contesto potrà comunque essere utile il noto test *chi quadro*.

Ora, nel nostro caso, al fine di avere una quantità di dati ed informazioni sufficientemente significativi al fine di poter proseguire nell'analisi e soprattutto per valutare l'accettabilità di una ben determinata distribuzione teorica di probabilità, vengono effettuate ulteriori rilevazioni presso il sistema.

I dati generali così ottenuti vengono illustrati in figura 20 dove:

- a) le modalità  $K$  rappresentano il numero di arrivi su intervalli di tempo di 10 minuti;
- b)  $f(k)$  rappresenta il numero di volte in cui si sono verificati  $K$  arrivi nell'intervallo prefissato;

Si ottiene quindi quanto segue:

*Figura n. 1.20*  
**Elaborazione dati per frequenze; confronto con la distribuzione di Poisson**

<b>K</b>	<b>f(k)</b>	<b>f(k)/somma f(k)</b>	<b>Poisson</b>
0	12	0,0420	0,02315
1	31	0,1084	0,08718
2	46	0,1608	0,16415
3	58	0,2028	0,20604
4	46	0,1608	0,19398
5	32	0,1119	0,14609
6	25	0,0874	0,09169
7	15	0,0524	0,04933
8	11	0,0385	0,02322
9	7	0,0245	0,00972
10	3	0,0105	0,00366
<b>Σ =</b>	<b>286</b>	<b>1,0000</b>	<b>0,99820</b>

Totale arrivi = 1077

$\lambda$  = 3,766

Dai dati appena illustrati si ottiene:

$$- \text{tasso medio di arrivo stimato} = \frac{K \cdot f(k)}{\sum f(k)} = \frac{1077}{286} = 3,766$$

su un  $\Delta t$  di 10 minuti.

– mentre, come ben sappiamo, i dati della distribuzione di *Poisson* sono:

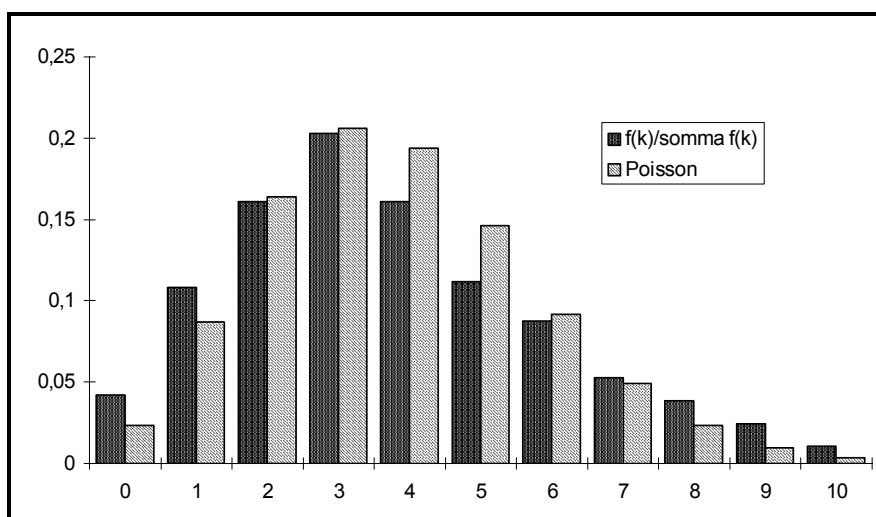
$$P_X(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Il tasso medio di arrivo, considerando come unità di tempo il minuto primo è quindi di 0,37658.

Una analisi visiva già sulla rappresentazione grafica dei dati illustrati nella precedente tabella ci inducono facilmente ad ipotizzare che gli arrivi hanno una distribuzione di *Poisson*. Già la tabella degli eventi, in effetti, evidenziava un ritmo relativamente uniforme degli arrivi presso il sistema. Non si sono infatti rilevati picchi o arrivi ad andamenti periodici che sono le situazioni tipiche in cui non può essere accettata l'ipotesi *poissoniana*.

La rappresentazione grafica di figura 21 ci permetterà di meglio comprendere quanto appena esposto.

*Figura n. 1.21*  
**Confronto tra distribuzione teorica ed osservazioni**



In maniera pressoché analoga si procederà nell'analisi dei tempi di servizio.

Una volta raccolti i dati relativi alle durate dei servizi presso il sistema per ogni unità, si procede al loro raggruppamento per intervalli temporali prefissati. Si otterranno così delle frequenze  $f(k)$ , per ognuno degli  $n$  intervalli, che rappresenteranno il numero di volte in cui il

tempo di servizio rilevato presso il sistema risulta compreso nell'intervallo considerato.

La seguente tabella illustra i dati raccolti e già raggruppati per frequenze:

*Figura n. 1.22  
(La distribuzione dei tempi di servizio)*

intervallo di tempo	f(k)	f(k)/N
0 ----> 2	675	0,62674
2 ----> 4	225	0,20891
4 ----> 6	98	0,09099
6 ----> 8	42	0,03900
8 ----> 10	17	0,01578
10 ----> 12	8	0,00743
12 ----> 14	7	0,00650
14 ----> 16	5	0,00464
$\Sigma =$	1077	1,00000

$N = \text{tot. arrivi} = \text{tot. unità servite} = 1.077$

Da una prima sommaria analisi della figura 22 si può osservare che la distribuzione esponenziale dovrebbe bene adattarsi a descrivere il fenomeno *durata del tempo di servizio*. Come si vede infatti si rilevano le frequenze maggiori in corrispondenza dei primi quattro intervalli.

La citata distribuzione esponenziale, che altro non è che la distribuzione di *Erlang* con parametro  $K = 1$ , ha una distribuzione di densità rappresentata dalla seguente espressione:

$$f(t) = \mu e^{-\mu t} \quad (1.6.1)$$

e nel caso generale della distribuzione di *Erlang*:

$$f(t) = \frac{(\mu k)^k}{(k-1)!} t^{(k-1)} e^{-\mu k t} \quad (1.6.2)$$

dove, generalmente,  $K$  è preso come valore intero e positivo, mentre  $\mu$  è il tasso di servizio presso il sistema.

Ora, nella figura 23, al fine di poter stimare il tasso medio di servizio presso il sistema, assumiamo che il valore della modalità rappresentativa di un certo intervallo sia esattamente il valore centrale dell'intervallo stesso.

E' possibile quindi confrontare i dati ricavati dalle osservazioni del sistema con i valori teorici della distribuzione esponenziale e quelli della distribuzione di *Erlang* che vengono illustrati nella seguente figura:

**Figura n. 1.23**

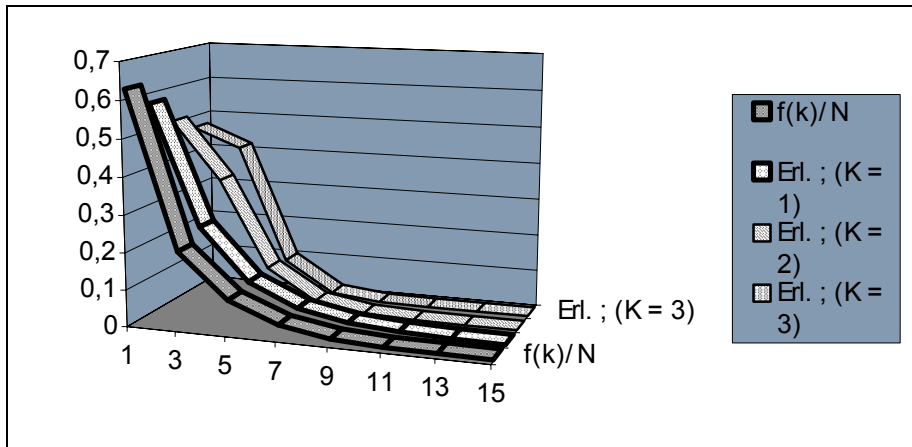
1	2	3	4	5	6	7
intervallo di A tempo B	valore centrale	f(k)	f(k)/N	esponenz. K = 1	Erlang K = 2	Erlang K = 3
0 ----> 2	1	675	0,6267	0,5716	0,5053	0,4672
2 ----> 4	3	225	0,2089	0,2449	0,3468	0,4152
4 ----> 6	5	98	0,0910	0,1049	0,1103	0,0992
6 ----> 8	7	42	0,0390	0,0449	0,0288	0,0159
8 ----> 10	9	17	0,0158	0,0193	0,0069	0,0021
10 ----> 12	11	8	0,0074	0,0082	0,0015	0,0000
12 ----> 14	13	7	0,0065	0,0035	0,0003	0,0000
14 ----> 16	15	5	0,0046	0,0015	0,0001	0,0000
$\Sigma =$		1077	1,0000	0,9988	1,0000	0,9997
tempo medio di servizio =			2,359	(1/ $\mu$ )		

La quinta, la sesta e la settima colonna della figura 23 elencano i valori degli integrali definiti della funzione di densità di *Erlang* calcolati in (A - B) con parametro K=1 per la colonna 5, K=2 per la colonna 6 e K=3 per la colonna 7. Detti valori sono le probabilità delle

tre distribuzioni di *Erlang* considerate calcolate per ogni intervallo (A – B).

La seguente figura 24 illustra quindi, relativamente ad ogni singolo intervallo di tempo, il confronto tra i valori rilevati delle probabilità ed i valori teorici forniti dalla distribuzione esponenziale e da quella di *Erlang* con parametro  $K=2$  e  $K=3$ .

*Figura n. 1.24*  
**Tempi di servizio; confronto tra i dati rilevati e le distribuzioni teoriche**



Come si può facilmente notare, già da un'analisi visiva della figura 24 emerge che la distribuzione che meglio si adatta a descrivere il fenomeno della durata dei tempi di servizio è l'esponenziale ( $K=1$ ). Alla stessa conclusione si arriverà utilizzando il metodo degli scarti tra i valori teorici ed i valori osservati.

La presente analisi proseguirà quindi con l'utilizzo del seguente modello di code:

- un solo posto di servizio;
- arrivi secondo Poisson;
- tempi di servizio esponenziali.

Viene utilizzato un modello con un solo posto di servizio in quanto si ipotizza che l'addetto allo sportello bancario faccia capo ad un servizio a se con una propria affluenza ben specifica. Esperienze concrete hanno in effetti confermato la validità dell'ipotesi introdotta e dei risultati del modello sopraccitato pur in presenza anche di più punti di servizio.

Il modello introdotto sarà quindi caratterizzato dai seguenti parametri:

- a)  $s = 1$
- b)  $\lambda =$  tasso di arrivo (unità di tempo di 1 minuto) = 0,37657
- c)  $\mu =$  tasso di servizio (unità di tempo di 1 minuto) = 0,42385

Si ottiene il seguente fattore di utilizzazione:

$$\rho = 0,37657 / 0,42385 = 0,888451$$

Sapendo che la probabilità di stato è data da:

$$P_n = (1 - \rho)\rho^n \quad (1.6.3)$$

si ottiene la seguente tabella:

*Figura n. 1.25*  
*Evoluzione della probabilità di stato*

<b>n</b>	<b>P(n)</b>
0	0,11155
1	0,09911
2	0,08805
3	0,07823
4	0,06950
5	0,06175
6	0,05486
7	0,04874
8	0,04330
9	0,03847
10	0,03418

Si ottengono inoltre dal modello i seguenti risultati fondamentali:

1) *lunghezza attesa della linea*  $L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = 7,96$

2) *lunghezza attesa della coda*  $L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = 7,08$

3) *tempo medio di attesa nel sistema*  $W = \frac{1}{\mu - \lambda} = 21,15$

4) *tempo medio di attesa nella coda*  $W_q = W - \frac{1}{\mu} = 18,79$

A questo punto dell'analisi dovranno essere confrontati i risultati del modello con i valori ricavati dalle osservazioni del sistema. In tale contesto dovrà infatti essere valutata l'accettabilità o meno del modello per l'analisi del sistema.

Nel nostro caso, e sulla base degli *output* forniti dal modello di code prescelto, si decide di accettare quest'ultimo al fine di analizzare il nostro sistema.

L'analista dovrà ora sapere valutare i costi ed i benefici connessi con eventuali modifiche del sistema orientate al miglioramento

dell'efficienza della struttura oppure al potenziamento della sua capacità di servizio.

Scelte come l'introduzione di apparecchiature elettroniche per l'automazione delle procedure o la riorganizzazione del servizio stesso dovranno essere analizzate considerando quelli che sono gli effetti sulla durata del tempo di servizio e sulla lunghezza della coda. Dette analisi potranno essere effettuate *ex-ante* in simulazione ed *ex-post* in fase di verifica ed eventuale messa a punto del sistema.

Si ipotizzi ora che nel nostro sistema si proceda all'automazione di alcune procedura manuali. All'operatore di sportello verrà quindi permesso di utilizzare un elaboratore elettronico mediante un terminale periferico.

Si ipotizzi che il costo di tale riorganizzazione sia stimabile in 50/mil. medi annui per posto di servizio e che comunque ciò comporti la riduzione del tempo medio di servizio a 2 minuti. Il tasso di servizio passa quindi a 0,5.

Il modello di code prescelto ci fornisce ora i seguenti output:

- 1) *lunghezza attesa della linea*  $L = 3,05$
- 2) *lunghezza attesa della coda*  $L_q = 2,30$
- 3) *tempo medio di attesa nel sistema*       $W = 8,10$
- 4) *tempo medio di attesa nella coda*       $W_q = 6,10$

Come si vede, sensibile appare il miglioramento dell'efficienza del punto di servizio. Mantenendo poi lo stesso fattore di utilizzazione (0,888451) il tasso di arrivo si porterebbe a 0,444226 (che corrisponde, nel nostro caso, a 160 arrivi giornalieri contro i 136 dell'osservazione di partenza). Il sistema ristrutturato è quindi in grado di sopportare 24 arrivi in più al giorno (fissato in 360 minuti il tempo totale di apertura sportello alla clientela) senza che vi sia una diminuzione della lunghezza della coda e comunque con una riduzione dei tempi medi di servizio. Su base annua il punto di servizio è quindi in grado di servire circa 6.000 clienti in più (fissate in 250 le giornate lavorative annue).

Il citato aumento di efficienza ed in particolar modo l'aumentata capacità di servizio del sistema dovrebbe permettere di coprire i costi sostenuti per la ristrutturazione e per l'automazione della procedura.

I 6.000 clienti che potenzialmente si possono servire in più o eventualmente nuovi servizi che potrebbero essere offerti, dovrebbero generare quei benefici (in termini di ricavi) che possono permetterci di giudicare, almeno dal punto di vista economico, conveniente la ristrutturazione così come impostata a monte.

Oltre possono essere le ipotesi alternative di sistema ristrutturato che possono essere analizzate e per ognuna di esse dovranno essere stimati - avvalendosi anche di simulazioni - i parametri ed il tipo di modello di code da utilizzate per lo studio del sistema. Spetterà all'analista ed agli eventuali organi competenti (aziendali) sapere orientare la propria scelta in quella direzione che meglio si adatta al raggiungimento degli obbiettivi dell'azienda.

### ***1.6.3 - Ulteriori considerazioni sull'utilizzo dei modelli di code.***

Con un esempio concreto si è illustrata la strada e la metodologia da seguire al fine di poter arrivare ad individuare un modello di code per analizzare un sistema.

Lo scopo fondamentale è soprattutto quello di porre il lettore in condizione di individuare quali sono gli aspetti fondamentali del fenomeno sui quali si deve in primo luogo polarizzare l'attenzione. Per tale ragione si è illustrata una metodologia di raccolta dati con particolare riferimento all'analisi degli arrivi.

Si ritiene comunque opportuno consigliare all'analista che intende iniziare uno studio di un sistema, procedere in primo luogo ad un'analisi per settori evitando quindi rilevazioni di dati a largo raggio e contemporaneamente su più aspetti del fenomeno (arrivi, uscite, composizione delle richieste ecc.) che potrebbero portare a determinare dei valori di stima dei parametri troppo approssimativi ed inficiati da errori rilevanti. Per tali ragioni si può affermare che l'analisi progressiva degli arrivi, delle uscite, della tipologia del

servizio richiesto del comportamento degli utenti presso il sistema (incluso il limite di sopportazione delle attese) ed altri aspetti fondamentali sia da ritenersi la via più razionale per una corretta analisi del sistema.

Un secondo aspetto fondamentale che dovrà sempre essere tenuto in considerazione è che i modelli in precedenza utilizzati per l'analisi si basano sull'ipotesi di stazionarietà del sistema. Sarà quindi essenziale per l'analista verificare l'accettabilità delle predette ipotesi. Il tutto si traduce in una verifica circa la dipendenza dell'affluenza presso il sistema o della durata del tempo di servizio da particolari fasi temporali. In effetti, se si considera per esempio l'affluenza presso un casello autostradale nel corso dell'anno, risulta estremamente difficile escludere che nel mese di agosto detta affluenza non possa in qualche modo essere legata ad un aspetto del fenomeno (forte aumento degli arrivi) che ci porta a verificare che effettivamente ogni anno in tale mese il tasso di arrivo presso il sistema registra un forte aumento. In tale contesto si può affermare che in effetti gli arrivi presso un casello autostradale sono, sotto certi aspetti legati al tempo. Sarà quindi compito dell'analista saper individuare quei periodi in cui l'ipotesi di stazionarietà possa essere accettata anche solo limitatamente a quei periodi. In tali circostanze non può quindi essere esclusa una analisi del sistema per “tranches temporali” una volta verificata per ogni tranche l'accettabilità dell'ipotesi di stazionarietà.

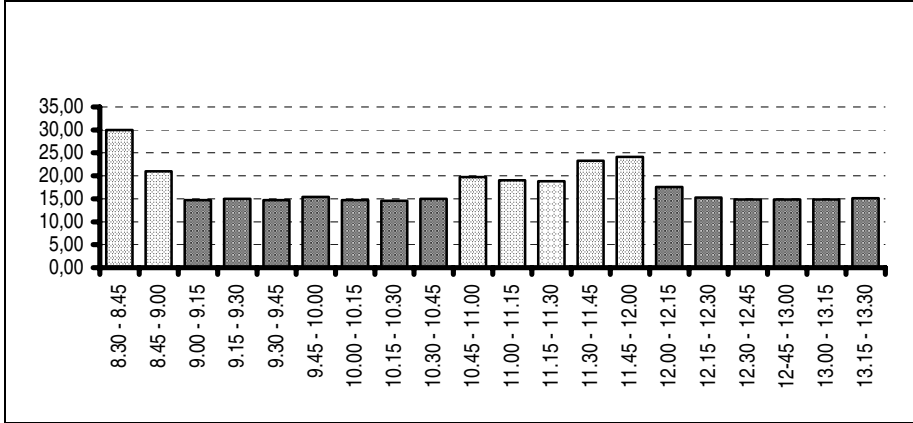
Al fine di meglio comprendere quanto appena esposto possiamo considerare il seguente esempio dove viene illustrata l'evoluzione degli arrivi presso un sistema in diverse giornate.

*Figura n. 1.26*  
*Evoluzione del tasso di arrivo  $\lambda$  presso un sistema)*

Periodo	Numero di arrivi per giornata							Media arrivi
	1	2	3	4	5	6	7	
8.30 - 8.45	28	31	35	25	30	29	32	30,00
8.45 - 9.00	23	21	18	20	22	19	24	21,00
9.00 - 9.15	15	14	12	16	17	13	16	14,71
9.15 - 9.30	12	16	17	15	14	15	16	15,00
9.30 - 9.45	13	17	18	14	18	12	11	14,71
9.45 - 10.00	16	19	14	11	16	17	15	15,43
10.00 - 10.15	17	12	14	16	16	15	13	14,71
10.15 - 10.30	14	18	19	11	12	13	15	14,57
10.30 - 10.45	18	20	13	16	11	13	14	15,00
10.45 - 11.00	21	18	19	22	19	20	19	19,71
11.00 - 11.15	19	20	23	18	16	18	19	19,00
11.15 - 11.30	18	15	21	19	20	22	17	18,86
11.30 - 11.45	25	26	24	23	25	19	21	23,29
11.45 - 12.00	28	25	21	24	20	25	26	24,14
12.00 - 12.15	18	19	20	17	16	15	18	17,57
12.15 - 12.30	15	14	16	12	17	19	14	15,29
12.30 - 12.45	13	15	14	17	16	15	14	14,86
12.45 - 13.00	17	13	18	14	11	17	14	14,86
13.00 - 13.15	18	19	12	15	14	15	11	14,86
13.15 - 13.30	11	15	16	16	16	17	15	15,14

Una rappresentazione grafica dell'andamento degli arrivi medi, sugli intervalli di tempo prefissati, ci aiuterà ad analizzare meglio il fenomeno. La figura che segue illustra quindi l'evoluzione della colonna "media arrivi".

*Figura n. 1.27*  
*Evoluzione della media arrivi di figura 26*



Come si può notare vi sono due periodi della giornata in cui si rileva un incremento degli arrivi e conseguentemente di  $\lambda$ . Detti periodi sono quello di apertura ((8.30 - 9.00) e quello che va dalle ore 10.45 alle ore 12.00. Per il resto della giornata può invece essere accettata valida l'ipotesi di stazionarietà del sistema.

Nell'analisi appena illustrata di fondamentale importanza può essere considerata quella della varianza degli arrivi medi che può senza dubbio essere considerata un valido indicatore sull'accettabilità o meno dell'ipotesi di stazionarietà.

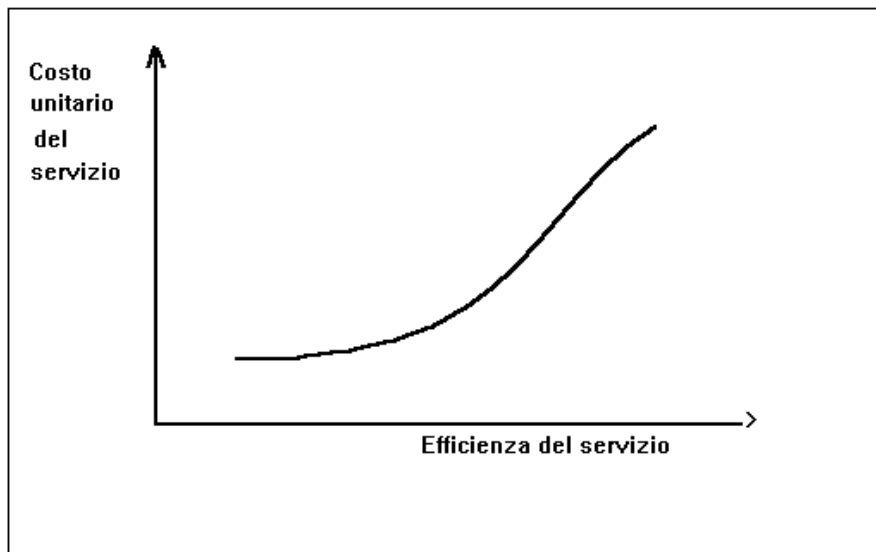
Una volta raccolti i dati presso il sistema ed opportunamente elaborati, il *test chi-quadro* non può che essere di fondamentale importanza al fine di decidere in merito all'accettabilità dell'ipotesi di appartenenza dei dati raccolti ad una distribuzione prescelta. Resta inteso comunque che anche una semplice analisi visiva su una rappresentazione grafica dei dati raccolti confrontati con la o le distribuzioni prescelte, ci può essere di primo aiuto al fine di decidere se procedere nell'analisi con l'utilizzo dei modelli prescelti. La citata analisi visiva può anche porre in evidenza la necessità di ricorrere a strumenti d'analisi alternativi ai modelli di code (ad es. modelli di simulazione).

Non deve essere inoltre trascurato anche uno studio attento dell'aspetto organizzativo della struttura che si va ad analizzare e per tale ragione la collaborazione del personale che in primo luogo utilizza le procedure è da considerare di fondamentale importanza al fine anche di arrivare ad una scelta corretta sull'eventuale modello da utilizzare nell'analisi.

Alla luce dei dati e delle informazioni raccolte l'analista ed il **gruppo di lavoro** incaricato dovranno condurre lo studio con lo scopo di decidere sul numero dei punti di servizio da attivare o eventualmente sugli interventi da effettuare al fine di migliorare l'efficienza del sistema.

Sappiamo che generalmente esiste una relazione diretta tra il costo unitario del servizio e l'efficienza del sistema ed il tutto può essere illustrato dalla seguente rappresentazione grafica:

*Figura n. 1.28*  
*Relazione tra costo del servizio ed efficienza del sistema*



Le decisioni che dovranno essere prese, sulla base dei risultati forniti dall'analisi del sistema e degli output ottenuti con l'utilizzo del modello di code, dovranno comunque prendere in considerazione in primo luogo quelli che sono gli obiettivi degli organi decisionali aziendali ai quali l'analisi stessa è indirizzata.

Ora è chiaro che il miglioramento dell'efficienza del servizio richiede, in via prioritaria, degli investimenti che possono riguardare sia la struttura tecnica del sistema sia una diversa organizzazione anche del personale con eventuali costi di riqualificazione degli addetti. Tali programmi e decisioni possono in alcune circostanze non trovare d'accordo quegli organi che non intendono, ad esempio, superare plafond di spesa a suo tempo prefissati. In tale contesto vengono quindi a crearsi dei conflitti decisionali e di competenza che possono portare a scelte che a volte si scostano in maniera

considerevole da quelli che in un primo momento potevano essere giudicate le soluzioni più economiche e razionali al problema.

Quanto appena esposto vuole in primo luogo portare a conoscenza del lettore che comunque il ruolo primario dell'analista è quello di mettere gli organi decisionali nella migliore condizione per poter effettuare quelle scelte che possono essere giudicate meglio compatibili con gli obiettivi aziendali primari. Queste considerazioni sono anche avvalorate dal fatto che quasi sempre l'analista e l'organo decisionale sono due differenti entità.

## **1.7 - LA SIMULAZIONE COME ALTERNATIVA AI MODELLI DI CODE**

Come si è visto, una delle caratteristiche fondamentali dei modelli di code in generale è quella di essere “**descrittivi**”. Essi quindi non ci permettono di ottenere, dal loro utilizzo, una soluzione ottimale o una scelta univoca da effettuare. Al contrario, l'utilizzo di questi modelli vuole essenzialmente aiutarci a descrivere il comportamento di un sistema di fronte a particolari situazioni (di arrivo e/o di uscita dal sistema).

L'utilizzo dei suddetti modelli presenta però dei limiti, non certo trascurabili, che sostanzialmente si concretizzano con l'accettabilità o meno delle ipotesi sulle quali i modelli stessi si basano.

Dall'analisi preliminare di un sistema può succedere che gli arrivi o le uscite o addirittura entrambi, siano difficilmente riconducibili a distribuzioni di probabilità che stanno alla base di uno o più modelli di code noti. In altri termini, in queste situazioni non è possibile utilizzare un modello di code noto per l'analisi del nostro sistema.

Per meglio comprendere quanto sin qui esposto si pensi a sistemi dove le distribuzioni degli intertempi di arrivo e/o di servizio siano “*plurimodali*” (ad esempio distribuzioni *a gobba di cammello*).

Per quanto riguarda gli arrivi presso un sistema, una situazione di arrivi distribuiti in maniera bimodale si ha quando questi avvengono

“a gruppi” periodici oppure quando gli arrivi stessi presso un sistema sono legati a fenomeni esterni (es. arrivo di un mezzo pubblico).

Nell'impossibilità di poter utilizzare per l'analisi modelli di code conosciuti, allo sperimentatore non rimarrà che utilizzare degli strumenti d'analisi alternativi quali appunto i modelli di simulazione.

### **1.7.1 - Definizione**

*Per simulazione intendiamo una “tecnica” che ci permette di analizzare e studiare il comportamento di un sistema mediante esperimenti campionari effettuati utilizzando un modello che dovrebbe descrivere, in tutto o in parte, il comportamento del sistema reale oggetto dell'analisi.*

I modelli di simulazione vengono utilizzati regolarmente nel settore automobilistico, aeronautico e spaziale (galleria del vento, prove d'impatto delle autovetture, collaudi dei componenti quali sospensioni, ali di aerei, prove di resistenza umana ecc.). Gli esperimenti di simulazione devono essere visti come normali esperimenti statistici ed i risultati analizzati secondo la teoria probabilistica.

Nell'analisi dei processi di entrata-uscita presso un sistema si polarizzerà l'attenzione in primo luogo sugli intertempi di arrivo e sui tempi di servizio.

I modelli utilizzati per l'analisi sono oggi, per la quasi totalità, dei programmi per elaboratore elettronico costruiti utilizzando pacchetti-software più o meno specifici. L'utilizzo di alcuni software orientati al problema della simulazione può permettere oggi anche ad operatori con poca esperienza di programmazione di poter costruire un proprio modello di simulazione sulla base di quelle che sono le conoscenze del sistema oggetto dell'analisi.

### **1.7.2. - La costruzione del modello di simulazione**

La scelta della *simulazione*, come già detto, viene fatta dopo che è stata verificata l'impossibilità di poter utilizzare un modello noto di

code (ad es. arrivi *poissoniani* e servizi secondo *Erlang*, modelli a priorità, ecc.). In questa situazione è ovvio che sono state stimate, a monte, le probabilità degli intertempi di arrivo e dei tempi di servizio e sono state analizzate le loro distribuzioni (test “chi quadro”, analisi grafica ecc.).

Il processo di utilizzo dei modelli di simulazione nell’analisi degli arrivi e delle uscite presso un sistema può essere ricondotto alle seguenti fasi fondamentali:

- 1. raccolta ed elaborazione dei dati;**
- 2. sviluppo di un modello che rappresenti il sistema analizzato;**
- 3. ricostruzione simulata dell’evoluzione degli eventi nel sistema;**
- 4. analisi dei risultati e loro confronto con i dati raccolti da osservazioni dirette sul sistema.**

Analizziamo ognuno dei singoli punti appena introdotti.

#### *1. Raccolta ed elaborazione dei dati.*

Questa fase si inquadra nel programma generale di analisi del sistema che può portare all’utilizzo sia di un modello di code noto sia di un modello di simulazione.

#### *2. Sviluppo di un modello di simulazione che descriva il sistema analizzato.*

Il punto di partenza fondamentale per la costruzione di un modello di simulazione è la conoscenza dettagliata del sistema oggetto di analisi e del suo comportamento.

Nel caso specifico dei processi di entrata-uscita presso un sistema ciò significa conoscere nei dettagli come gli eventi si susseguono e come si evolvono all’interno del sistema. Importante è quindi conoscere come avvengono gli arrivi ed eventualmente se ci sono dei fenomeni esterni che possono interferire su tale processo (es. scadenze tecniche, informazioni radio-TV, andamento climatico ecc.). In

maniera analoga tale processo conoscitivo deve essere rivolto alle uscite.

Una volta completato lo studio del sistema è opportuno effettuare una scomposizione dello stesso e procedendo all'analisi di ogni singolo elemento scomposto (arrivi, ripartizioni degli arrivi all'interno del sistema, tempi di servizio, uscite, sviluppo delle linee e delle code di attesa ecc.).

Un esempio ci permetterà di meglio comprendere quanto abbiamo sin qui introdotto e quanto andremo a sviluppare.

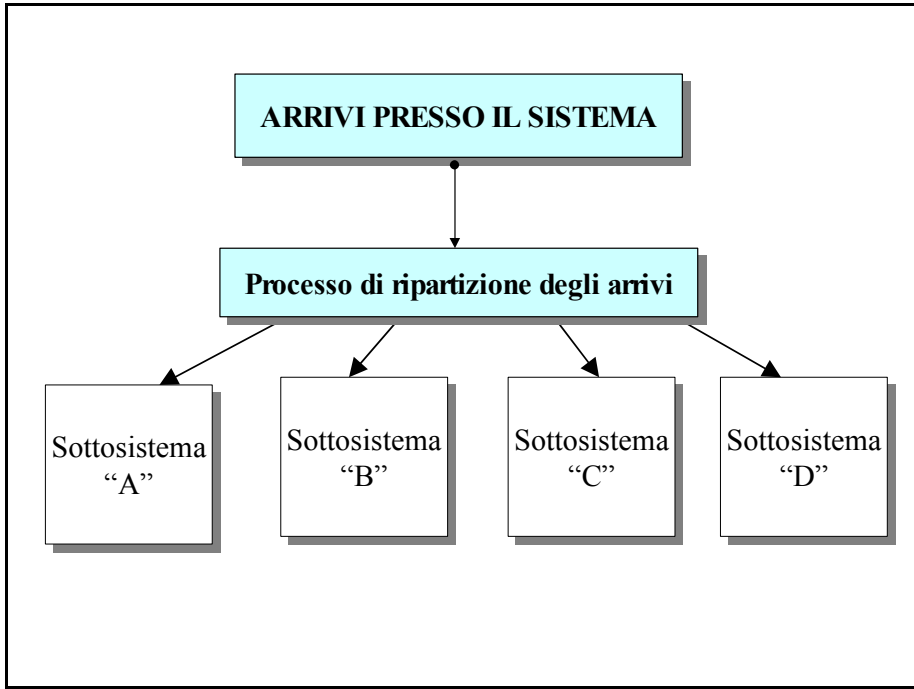
Si consideri uno sportello bancario dove la clientela in arrivo si indirizza presso uno dei quattro sottosistemi fondamentali nei quali può essere divisa la struttura e che sono:

- A)** operazioni “*di cassa*” (versamenti, prelevamenti, ecc.);
- B)** operazioni di “*compravendita titoli mobiliari ed investimenti*” (azioni, obbligazioni, fondi comuni ecc.);
- C)** operazioni di “*consulenza*” in generale;
- D)** operazioni “*self-service*”.

Ognuno dei quattro sottosistemi è caratterizzato da una propria affluenza, da propri tempi di servizio e da proprie distribuzioni di probabilità, che comunque dipendono e sono legati dall'affluenza generale presso il sistema.

La struttura oggetto dell'analisi può essere rappresentato schematicamente dalla figura che segue:

*Figura n. 1.29*  
*Schema degli arrivi presso il sistema*



Obiettivo dell'analisi del sistema appena illustrato sarà quello di vedere come si evolve il processo di arrivi ed uscite ed in modo particolare la formazione delle linee e code di attesa.

I dati relativi alle osservazioni dirette presso il sistema dovranno fornire allo sperimentatore tutte quelle informazioni che sono necessarie al fine di procedere alla ricostruzione simulata degli eventi (ripartizione degli arrivi nei sottosistemi, distribuzione di probabilità degli intertempi di arrivo, distribuzione di probabilità dei tempi di servizio ecc.).

A questo punto è possibile procedere alla ricostruzione simulata dell'evoluzione degli eventi nel sistema.

### 3. Ricostruzione simulata dell'evoluzione degli eventi nel sistema;

Premesso che in questa sede si ipotizzerà solo l'utilizzo di modelli di simulazione su elaboratore elettronico, vediamo ora, in primo luogo, come avviene il **processo di generazione degli eventi** (\*\*).

Lo "strumento" matematico-statistico che, nella quasi totalità dei casi, viene usato in questa fase è quell'algoritmo noto come "generatore di numeri casuali".

Molti sono gli algoritmi che possono essere utilizzati come generatori di numeri casuali; alcuni di questi vengono classificati come *congruenziali additivi e moltiplicativi*.

Un esempio di generatore congruenziale moltiplicativo è quello che fornisce l'(n+1)-esimo numero casuale, che definiremo  $\alpha_{n+1}$ , dall' n-esimo numero casuale ( $\alpha_n$ ), utilizzando la seguente espressione:

$$\alpha_{n+1} \equiv k \cdot \alpha_n \pmod{m} \quad \text{con } (k < m)$$

dove  $k$  ed  $m$  sono numeri interi e positivi. L'espressione riportata indica quel numero  $\alpha_{n+1}$  che si ottiene quale *resto della divisione*  $\frac{k \cdot \alpha_n}{m}$ .

La seguente tabella illustra una serie di numeri casuali generati utilizzando il suddetto algoritmo:

---

(\*\*) Cfr. Georges S. Fishman – MONTE CARLO: CONCEPTS, ALGORITHMS AND APPLICATIONS – Springer 1999

$$\alpha_0 = 1.234.567.890$$

$$k = 12.583$$

$$m = 4.578.965$$

$$\alpha_1 = 3.153.625$$

752.685	964.590	3.222.540	736.925	2.276.955	442.490
1.735.735	3.178.720	2.485.745	323.150	340.760	4.409.195
3.669.420	574.485	3.798.385	75.530	1.871.840	2.160.745
2.607.765	3.137.985	4.420.750	2.548.235	3.745.725	3.339.130
643.805	850.060	1.030.430	2.528.075	1.170.930	4.268.915
809.230	4.421.705	2.850.775	697.870	3.281.785	4.497.995
3.501.895	3.889.265	4.268.980	3.422.305	1.594.285	2.263.685

Presupposto fondamentale per la costruzione di un valido modello di simulazione è che i numeri forniti in successione dal generatore di numeri casuali abbiano tutti la stessa probabilità di verificarsi e che queste probabilità siano statisticamente indipendenti le une dalle altre. I numeri casuali generati devono quindi avere una **distribuzione di probabilità uniforme** (\*).

È importante sapere che il processo di generazione dei numeri casuali introdotto, come quasi tutti i modelli teorici conosciuti, presentano una ciclicità più o meno marcata e quindi il modello che genera numeri casuali probabilisticamente distribuiti in maniera uniforme rimane un obiettivo puramente teorico. Nella realtà esistono generatori di numeri casuali, più o meno sofisticati, in grado di creare

---

(\*) La distribuzione di probabilità uniforme è tale per cui si ha:

$$F_X(b) = \begin{cases} 0 & \text{per } b < 0 \\ b & \text{per } 0 \leq b \leq 1 \\ 1 & \text{per } b > 1 \end{cases}$$

e per qualsiasi intervallo  $[\alpha, \beta]$  nel quale la funzione è definita si ha la seguente funzione di densità:

$$f_x(y) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & \text{per } \alpha \leq y \leq \beta \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

sequenze di numeri talmente lunghe che la loro eventuale ciclicità influisce in modo irrilevante sul processo di simulazione.

E' opportuno precisare comunque che i software attualmente disponibili per la realizzazione dei modelli di simulazione su elaboratore elettronico annoverano già, tra le loro funzioni interne, lo stesso generatore.

Partendo dal un processo di generazione di numeri casuali illustrato è possibile associare ad ogni numero fornito il verificarsi di un ben determinato evento (un preciso intertempo di arrivo, un preciso tempo di servizio ecc.).

Uno dei passi fondamentali nella fase di studio del sistema oggetto di analisi è quello di predisporre, alla luce delle osservazioni effettuate, delle tabelle che possano permettere di associare ad ogni numero casuale il verificarsi di uno degli  $n$  eventi possibili del fenomeno allo studio (ad esempio ripartizione degli arrivi sui quattro sottosistemi).

Si ipotizzi che, sulla base delle osservazioni e rilevazioni effettuate, siano state stimate le seguenti ripartizioni degli arrivi sui quattro sottosistemi:

<b>Sottosistema</b>	<b>% arrivi</b>
A	38 %
B	22%
C	15%
D	25%

In questo caso, ammesso che i numeri casuali forniti dal generatore siano compresi tra 1 e 1.000.000, possiamo effettuare le seguenti associazioni:

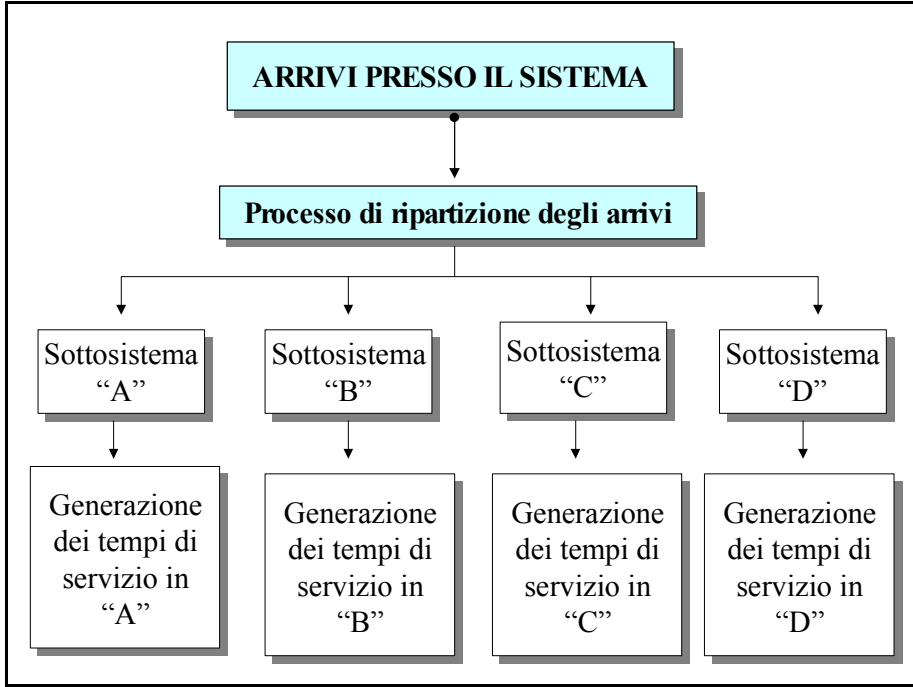
Intervallo numeri casuali	%	arrivo presso sottosistema:
1	----  380.000	38% A
380.001	----  600.000	22% B
600.001	---  750.000	15% C
750.001	---  1.000.000	25% D

In presenza di un numero casuale “125.876” si associerà l’evento “*arrivo in A*” mentre al numero 742.538 si associerà l’evento “*arrivo in C*” e così via.

In maniera pressoché analoga si procederà per la simulazione degli eventi “*intertempi di arrivo*” e “*tempi di servizio*” e per ogni altro evento nel sistema.

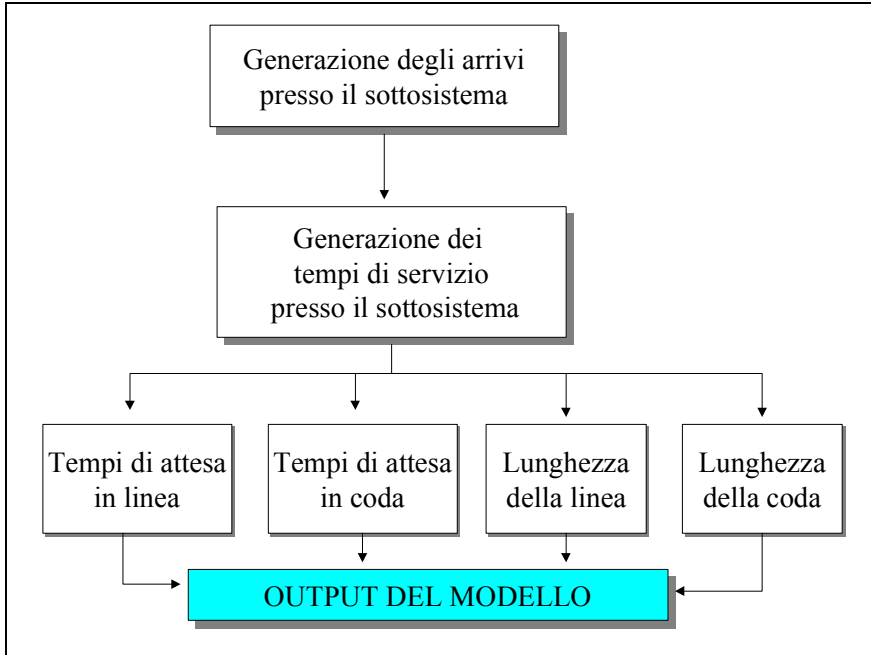
Riprendendo l’analisi dello sportello bancario, introdotta quale esempio illustrativo, descriviamo ora il modello di simulazione nelle sue componenti fondamentali riprendendo la fig. 1.29:

**Fig. 1.30**  
**Generazione arrivi e tempi di servizio**



Analizzando gli eventi presso ogni singolo sottosistema è possibile, a questo punto, vedere e descrivere il processo di formazione delle code e la loro evoluzione.

**Fig. 1.31**  
**Generazione degli output.**



*A) – La generazione degli arrivi.*

Nell'analisi degli arrivi l'attenzione verrà polarizzata sugli **intertempi di arrivo** tra l'n-esimo utente e l'(n+1)-esimo. Ad ogni numero casuale generato nel modello di simulazione<sup>(\*)</sup>, in questa fase, verrà associato un **ben determinato intertempo di arrivo** secondo una tabella preimpostata e ricostruita sulla base delle osservazioni dirette presso il sistema.

Ipotizziamo che, sulla base dei dati raccolti presso il sistema, siano state stimate le probabilità degli intertempi di arrivo come dalla tabella di seguito riportata.

---

(\*) I numeri casuali generati vanno da 0 a 1.000.000.

Come si può notare, agli arrivi i cui intertempi sono compresi in un certo intervallo  $\gamma$  (col. B), il modello di simulazione assegna il corrispondente valore “*intertempo*” di col. C.

Il processo di associazione degli intertempi di servizio ai numeri casuali avviene sulla base delle probabilità stimate a seguito di rilevazioni campionarie presso il sistema oggetto di osservazione (col. D).

### *Analisi degli arrivi – generazione degli eventi*

A	B	C	D	E	F	G
N.	INTERVALLO (in minuti primi) - $\gamma$ -	INTERTEMPO Assegnato all'intervallo (ore,min.sec.)	P ( $x \in \gamma$ )	Probabilità cumulativa	P. 10 <sup>6</sup>	Intervallo n. casuali associati all'evento (intertempo assegnato all'intervallo)
1	0 ---  1	<b>0.00.30</b>	0,15300	0,15300	153000	<b>0</b> ----  <b>153000</b>
2	1 ---  2	<b>0.01.30</b>	0,12620	0,27920	126200	<b>153000</b> ----  <b>279200</b>
3	2 ---  3	<b>0.02.30</b>	0,08500	0,36420	85000	<b>279200</b> ----  <b>364200</b>
4	3 ---  4	<b>0.03.30</b>	0,12200	0,48620	122000	<b>364200</b> ----  <b>486200</b>
5	4 ---  5	<b>0.04.30</b>	0,09710	0,58330	97100	<b>486200</b> ----  <b>583300</b>
6	5 ---  6	<b>0.05.30</b>	0,07800	0,66130	78000	<b>583300</b> ----  <b>661300</b>
7	6 ---  7	<b>0.06.30</b>	0,05100	0,71230	51000	<b>661300</b> ----  <b>712300</b>
8	7 ---  8	<b>0.07.30</b>	0,04100	0,75330	41000	<b>712300</b> ----  <b>753300</b>
9	8 ---  9	<b>0.08.30</b>	0,05200	0,80530	52000	<b>753300</b> ----  <b>805300</b>
10	9 ---  10	<b>0.09.30</b>	0,06500	0,87030	65000	<b>805300</b> ----  <b>870300</b>
11	10 ---  11	<b>0.10.30</b>	0,07200	0,94230	72000	<b>870300</b> ----  <b>942300</b>
12	11 ---  12	<b>0.11.30</b>	0,03300	0,97530	33000	<b>942300</b> ----  <b>975300</b>
13	12 ---  13	<b>0.12.30</b>	0,01200	0,98730	12000	<b>975300</b> ----  <b>987300</b>
14	13 ---  14	<b>0.13.30</b>	0,00810	0,99540	8100	<b>987300</b> ----  <b>995400</b>
15	14 ---  15	<b>0.14.30</b>	0,00130	0,99670	1300	<b>995400</b> ----  <b>996700</b>
16	15 ---  16	<b>0.15.30</b>	0,00083	0,99753	830	<b>996700</b> ----  <b>997530</b>
17	16 ---  17	<b>0.16.30</b>	0,00075	0,99828	750	<b>997530</b> ----  <b>998280</b>
18	17 ---  18	<b>0.17.30</b>	0,00061	0,99889	610	<b>998280</b> ----  <b>998890</b>
19	18 ---  19	<b>0.18.30</b>	0,00048	0,99937	480	<b>998890</b> ----  <b>999370</b>
20	19 ---  20	<b>0.19.30</b>	0,00042	0,99979	420	<b>999370</b> ----  <b>999790</b>
21	20 ---  21	<b>0.20.30</b>	0,00021	1,00000	210	<b>999790</b> ----  <b>1000000</b>
<b>Totale</b>			1,00000			

A titolo di esempio si può notare che al n. casuale 153200 viene associato l'evento *intertempo di 1' 30"*, al n. casuale 852125 viene associato l'evento *intertempo di 9' 30"* ecc.

Gli intervalli di *col. G* si allineano alle probabilità del verificarsi degli intertempi di arrivo compresi negli intervalli  $\gamma$  ed ai quali si associa, per tutto l'intervallo, il valore di *col. C*. Le approssimazioni che derivano da questa associazione vengono giudicate trascurabili ed irrilevanti ai fini dell'analisi finale del comportamento del sistema.

A questo punto, attivando il generatore di numeri casuale, è possibile ricreare una serie di arrivi "sufficientemente lunga" per avere dei dati significativi sul comportamento del sistema.

#### *B) – La generazione dei tempi di servizio.*

Per quanto concerne i tempi di servizio il procedimento è analogo a quello appena illustrato per gli intertempi di arrivo; unica differenza è l'evento generato dal procedimento che è appunto il **tempo di servizio**.

Si procederà in questo caso alla ricostruzione di una tabella analoga a quella relativa alla generazione degli eventi "*arrivi*", riportata nelle pagine precedenti, con l'unica differenza che essa si riferirà al fenomeno "*tempi di servizio*". Anche in questo caso i valori riportati nella tabella saranno quelli ottenuti dall'elaborazione dei dati rilevati presso il sistema.

Una volta ricostruita la tabella è possibile, utilizzando il generatore di numeri casuali, generare una serie di eventi "*tempi di servizio*" sufficientemente lunga e tale da fornirci dati significativi sul comportamento del sistema.

#### *C) – Analisi della successione degli eventi generati.*

Una volta fissato  $\alpha$  come tempo iniziale del sistema a partire dal quale inizia il processo di simulazione, verranno generati una serie di

eventi “*intertempo di arrivo*” e “*tempi di servizio*” a ciascuno dei quali verrà assegnato un preciso istante temporale determinato dagli stessi eventi generati.

Ipotizzando ( $\alpha = \text{ore } 8.00$ ), se il primo intertempo di arrivo è di 1' e 30" ciò significa che il primo arrivo avviene alle ore 8 01' 30"; e se il secondo intertempo è di 3' e 30" ciò significa che il secondo arrivo avviene alle ore 8 05' 00" e così via.

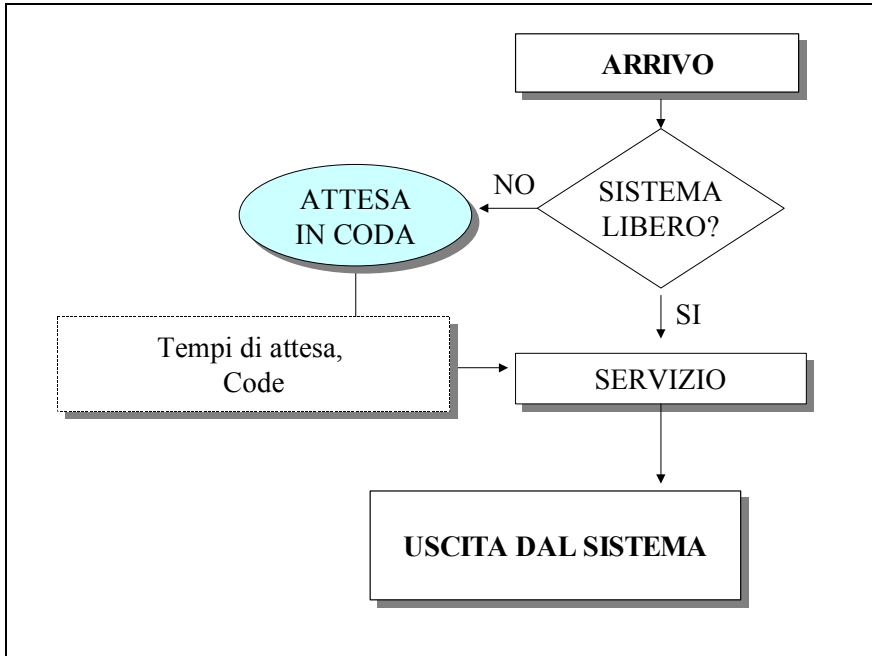
In maniera analoga si procede per i tempi di servizio.

È possibile in molti casi fissare  $\alpha = \text{ore } 00.00.00$  purché detto valore **iniziale** sia identico per gli arrivi e per i tempi di servizio.

**La successione degli arrivi e dei tempi di servizio generati, ai quali sono stati assegnati precisi istanti temporali, ci permette di ricostruire il processo di arrivi e uscite presso il sistema.**

Nel nostro caso specifico la ricostruzione e l'evoluzione degli eventi presso il sistema avviene come illustrato dal seguente diagramma di flusso:

**Fig. 1.32**  
**Arrivi ed uscite dal sistema**



Partendo dagli eventi “arrivi” e “tempi di servizio” generati è così possibile ricostruire per ognuno degli  $n$  arrivi:

- tempo di arrivo  $t_n$ ;
- durata dell’attesa e della permanenza in coda;
- tempo di inizio del servizio  $r_n$ ;
- tempo di fine servizio  $z_n$ ;
- durata della permanenza nel sistema;
- lunghezza della coda all’istante  $t_n$ ;

Per ognuno degli  $n$  arrivi presso il sistema – con  $n$  sufficientemente grande - il modello di simulazione eseguirà il seguente controllo:  
se tempo di arrivo  $t_n \geq z_{n-1}$  e quindi l’ $n$ -esimo arrivo avviene dopo che è uscito dal sistema l’utente  $(n-1)$ -esimo (o nello stesso istante) – **l’inizio del servizio è immediato**;

se tempo di arrivo  $t_n < z_{n-1}$  e quindi l'n-esimo arrivo avviene prima che sia uscito dal sistema l'utente (n-1)-esimo – si ha il passaggio in coda dell'utente n-esimo.

*D)– Memorizzazione degli output di simulazione ed elaborazione dei dati.*

Come si è già detto in precedenza, il modello di simulazione ricostruirà un numero sufficientemente grande di arrivi, a ciascuno dei quali collegherà una precisa durata del tempo di servizio. Di conseguenza verranno determinati, sempre per ognuno degli  $n$  eventi simulati, il tempo di attesa in linea ed in coda ed il tempo di permanenza nel sistema. Contestualmente nel sistema è possibile analizzare l'evoluzione delle code di attesa anche mediante l'utilizzo di grafici.

Gli output forniti dal modello di simulazione, raccolti ed analizzati, ci forniranno tutte quelle informazioni che ci permetteranno di giudicare il comportamento del sistema e la sua più o meno elevata efficienza.

Considerando successivamente distribuzioni di probabilità alternative, sia degli intertempi di arrivo sia dei tempi di servizio, è possibile analizzare il comportamento del sistema in presenza di queste nuove situazioni ed ipotesi confrontando i risultati della simulazione con le precedenti già effettuate.

*4. Analisi dei risultati e loro confronto con i dati raccolti da osservazioni dirette sul sistema.*

Raggiunta questa fase della simulazione è possibile analizzare i risultati ottenuti e valutare il comportamento del sistema in presenza di soluzioni organizzative alternative.

Il modello di simulazione costruito può essere, in primo luogo, utilizzato per ricostruire il comportamento del sistema in presenza di distribuzioni di probabilità tipiche di alcuni modelli di code conosciuti

(ad es. arrivi *poissoniani* e tempi di servizio secondo *Erlang*). In tale situazione il modello di simulazione dovrà fornire, quali output, valori medi che progressivamente ed all'aumentare del numero degli eventi simulati convergeranno ai valori  $L$ ,  $L_q$ ,  $W$  e  $W_q$  del modello di code posto a confronto.

Quest'ultima verifica può essere considerata già una positiva valutazione della bontà del modello costruito anche se generalmente è il modello di simulazione che è strumento di misura della validità del modello matematico-statistico di confronto.

L'attendibilità dei dati-output forniti dal modello di simulazione sarà comunque, in primo luogo, verificata mediante la valutazione dei suoi risultati (medie dei tempi di attesa in linea ed in coda, lunghezze medie delle linee e delle code) ed il loro confronto con quelli ottenuti dalle osservazioni dirette presso il sistema oggetto di analisi.

La positiva valutazione del modello costruito ci permette di ricreare il comportamento del modello in presenza di una o più delle seguenti ipotesi alternative:

- nuova distribuzione degli intertempi di arrivo;
- nuova distribuzione dei tempi di servizio;
- diversa ripartizione degli arrivi presso i sottosistemi ipotizzati;
- diverso criterio di servizio (ad es. a priorità o per appuntamento).

I risultati che ci forniranno le diverse fasi di simulazione saranno il punto di partenza nella ricerca di nuove soluzioni organizzative aventi l'obiettivo di aumentare l'efficienza del sistema e la qualità dei servizi offerti.

## **1.8 - CONCLUSIONI**

A questo punto il lettore avrà sicuramente compreso quale sia il ruolo della teoria delle code nella ricerca operativa e soprattutto quale sia la funzione dei modelli, come quelli introdotti nella presente trattazione, al fine di poter analizzare i processi di arrivo e servizio presso un sistema in genere.

Si sono introdotti degli strumenti che lo sperimentatore potrà utilizzare sia per valutare l'efficienza di un punto di servizio o di un sistema in generale, sia per il confronto con altre analoghe strutture.

Non deve comunque essere dimenticata la possibilità che offre la materia di poter utilizzare i modelli al fine anche di valutare la convenienza o meno ad effettuare particolari scelte o modifiche organizzative su una struttura. In tale contesto comunque può essere utile l'utilizzo di modelli che possano in qualche modo simulare la nuova organizzazione del sistema al fine di poter sia scegliere il modello di code più appropriato sia di stimare con maggiore realismo i parametri del nuovo modello di code da utilizzare.

Purtroppo le ipotesi sulle quali si basano i modelli di code presentati pongono dei limiti alla ricerca.

Ci si può spesso trovare in presenza di sistemi dove la distribuzione degli arrivi o dei tempi di servizio o addirittura entrambe siano difficilmente ricollegabili alle distribuzioni di probabilità teoriche sulle quali si basano i modelli di code. In tale situazione al ricercatore non rimarrà che percorrere strade alternative una delle quali può essere quella che prevede l'utilizzo di modelli di simulazione. Sono questi ultimi indubbiamente dei validi strumenti alternativi la cui efficienza dipende comunque dalle capacità di chi deve predisporre il modello di simulazione. In realtà questi strumenti possono essere, sotto certi aspetti, paragonati all'abito su misura confezionato da un sarto. Si tratta indubbiamente di modelli che vengono progettati sulla base delle osservazioni effettuate sul sistema e sulle regole che governano il funzionamento del sistema stesso.

Quello che si ritiene opportuno sottolineare, alla fine del presente lavoro, è l'utilità dei modelli di code nell'analisi dei flussi di entrata-uscita presso un sistema quando, come avviene in moltissimi casi, le situazioni reali soddisfano le ipotesi dei modelli stessi.

Gli interventi che possono essere effettuati sulla struttura o il sistema possono riguardare:

- *il numero dei punti di servizio da attivare;*

- *l'aumento dell'efficienza del sistema e quindi di  $\mu$  oppure l'aumento del tasso di arrivo per effetto, ad esempio, di campagne pubblicitarie o dell'ampliamento della gamma dei servizi offerti.*

La possibilità che viene offerta all'analista di poter vedere come potrebbe comportarsi un sistema o un punto di servizio, a seguito di scelte riguardanti la struttura non può che essere considerato di fondamentale importanza.

In alcuni casi potrà risultare di estremo interesse valutare i benefici derivanti dall'ampliamento della gamma dei servizi offerti per effetto di una modifica organizzativa della struttura con l'inserimento anche di nuovi supporti tecnici (es. elaboratori elettronici, terminali self-service ecc.).

Particolare rilievo deve quindi essere riservato all'analisi economica del sistema e della sua evoluzione e preminentemente per quanto concerne i costi ed i benefici collegati a scelte già effettuate a monte o solo programmate.

Si deve tener presente inoltre che taluni benefici (per es. aumento delle quote di mercato e del prestigio dell'azienda), in particolar modo connessi con modifiche dell'immagine sul mercato della struttura analizzata, possono essere quantificati a volte in maniera soggettiva e a volte sono verificabili ex-post e solo dopo che è trascorso un certo periodo di sperimentazione. Ciò può quindi, in talune circostanze, giustificare scelte che nel breve periodo possono essere giudicate antieconomiche mentre nel medio e lungo periodo evidenziano una loro validità anche con riferimento ad un'analisi costi-benefici.

Quanto si ritiene opportuno sottolineare, a conclusione della presente trattazione, è che l'utilità dei modelli di code e dei risultati da loro forniti devono essere considerati nel contesto dell'analisi globale del sistema e degli obiettivi che si intendono raggiungere. Anche se il solo utilizzo degli strumenti matematico-statistici, introdotti in questa sede, non potrà soddisfare ed esaurire le richieste di informazioni utili al fine di determinare le scelte aziendali, certamente i citati strumenti non potranno che svolgere un ruolo fondamentale nell'analisi globale.

## - II - GESTIONE DELLE SCORTE

### 2.1 – GENERALITÀ

In senso stretto si chiama "*scorta*" (o dalla lingua anglosassone "*stock*") la quantità di prodotti finiti, semilavorati, materie prime che un'azienda tiene nei propri magazzini per un futuro utilizzo allo scopo di realizzare la massima regolarità ed efficienza nel proprio funzionamento. In senso lato si può parlare di "*scorte*" anche quando non si tratta solo di prodotti fisici, ma anche quando ci si riferisce a denaro, macchine, forza lavoro o altri fattori che sono presenti nella realtà gestionale d'azienda. Il che vuol dire che i modelli matematici delle scorte possono teoricamente trovare applicazione non solo nelle gestioni dei magazzini, ma anche in altri campi della realtà aziendale.

Il fatto di mantenere alti livelli delle scorte in azienda può comportare dei **vantaggi** e degli **svantaggi**;

*vantaggi:*

derivano essenzialmente dalla possibilità di:

- ridurre i costi unitari conseguentemente alla realizzazione di produzioni più grandi (tipico caso delle aziende che producono su commessa);
- avere un carico di lavoro equilibrato ed una conseguente migliore programmazione sia della produzione che della distribuzione dei prodotti per la vendita (tipico caso delle aziende che producono in serie a ciclo continuo);

- ottenere un più rapido soddisfacimento degli ordini di vendita con una conseguente più rapida riscossione dei crediti dai clienti ed aumento delle vendite (tipico caso delle aziende commerciali);
- realizzare guadagni speculativi nelle particolari situazioni di mercato caratterizzate da prezzi crescenti.

*svantaggi:*

sono dovuti essenzialmente ai costi per:

- il denaro immobilizzato nello stock dei prodotti;
- l'affitto o l'occupazione dell'area del magazzino;
- il deprezzamento o il deterioramento dei prodotti;
- il lavoro fisico e contabile del magazzino;
- l'assicurazione e il controllo della gestione.

Sia i vantaggi che gli svantaggi vengono valorizzati al fine di quantificare in termini economici e finanziari gli effetti delle politiche seguite dall'azienda per gestire i magazzini.

Dal punto di vista gestionale è conveniente aumentare il livello delle scorte fino a quando il maggior guadagno o maggior risparmio conseguito supera il maggior costo che ne deriva.

Troppa quantità di prodotti stoccati a magazzino può comportare un eccesso di costi rispetto ai benefici economici.

Così pure una bassa quantità di prodotti in magazzino può comportare la cosiddetta ***rottura dello stock*** cioè l'impossibilità di evadere gli ordini per la mancanza di prodotti e la conseguente perdita di clienti.

Il problema consiste nel determinare ogni quanto tempo deve essere attivato un ciclo di produzione o approvvigionamento dei prodotti da stoccare e che quantità deve essere approvvigionata per ogni ciclo in modo tale da bilanciare il risparmio ottenuto con il costo globale delle scorte.

## 2.2 - REQUISITI DEI PROBLEMI DELLE SCORTE.

I problemi delle scorte presentano i seguenti quattro requisiti essenziali:

- 1) deve esistere una domanda di certi articoli che può essere conosciuta e determinata o aleatoria e variabile nel tempo;
- 2) deve esistere uno stock di questi articoli al fine di poter soddisfare la domanda. Lo stock può essere riapprovvigionato in uno dei seguenti modi:
  - con continuità nel tempo
  - con cadenza periodica a intervalli costanti
  - a intervalli discontinui
- 3) devono esserci degli obiettivi da raggiungere e dei vincoli da rispettare che dipendono dallo specifico caso pratico da affrontare;
- 4) devono esserci dei parametri economici (dati da costi e ricavi) che consentano di definire la funzione matematica del sistema;

## 2.3 - ANDAMENTO GRAFICO DELLE SCORTE.

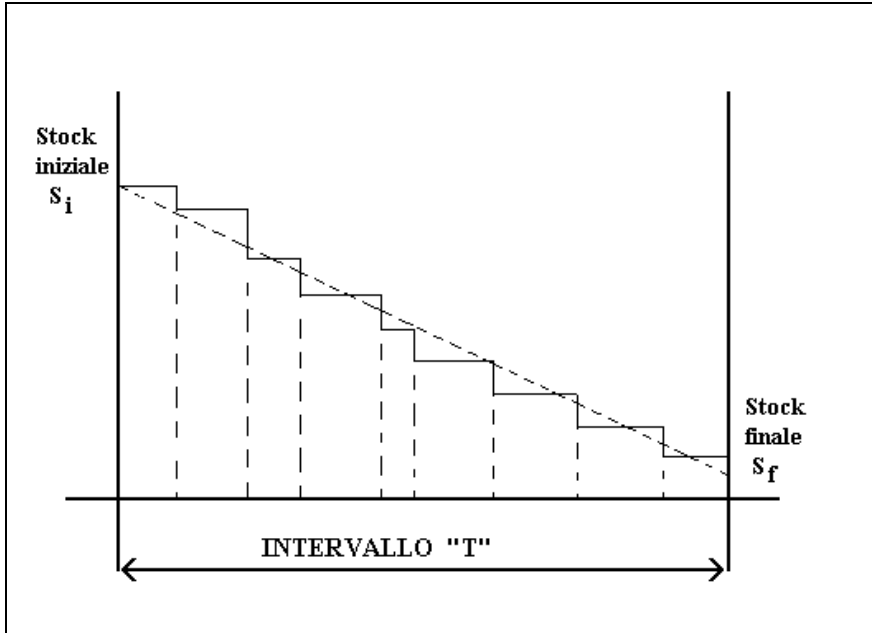
In un dato periodo  $T$  il livello massimo dello stock è quello iniziale  $S_i$ , mentre il minimo è quello finale  $S_f$ .

Man mano che viene evasa la domanda degli articoli lo stock decresce con andamento scalare come indicato nella figura 2.2. In pratica però le richieste si verificano nel periodo  $T$  con successione casuale.

Pertanto nel discreto si avrà un andamento scalare decrescente ad intervalli di ampiezza non regolare.

Per l'analisi teorica invece è più comodo interpolare il grafico scalare del discreto con una curva continua che normalmente è una retta (quella tratteggiata sul grafico).

*Figura n 2.1*  
*Andamento grafico delle scorte*



## **2.4 - METODI DI GESTIONE DELLE SCORTE.**

I metodi più comuni per la gestione delle scorte sono:

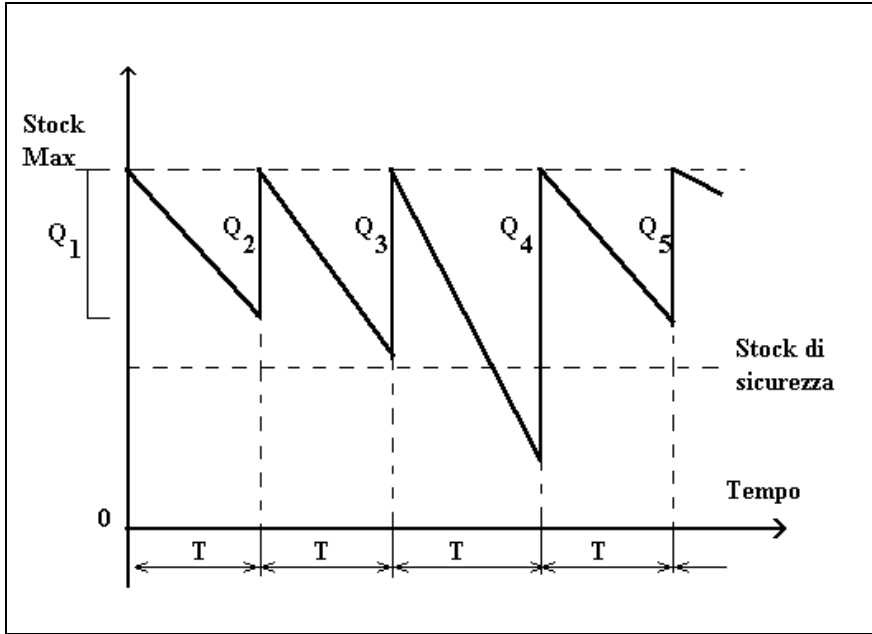
### **A) *Gestione con tempo di evasione dell'ordine nullo.***

*1° caso:*

Approvvigionamenti in periodi costanti  $T$  di lotti in quantità variabile  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, \dots$

**Figura n. 2.2**

**1° CASO - Gestione delle scorte con tempo di evasione nullo**  
*Approvvigionamento in periodi costanti di lotti variabili.*



- periodi di approvvigionamento → **T = costante**
- quantità lotti → **Q<sub>1</sub>, Q<sub>2</sub>, Q<sub>3</sub>, Q<sub>4</sub>, Q<sub>5</sub>**

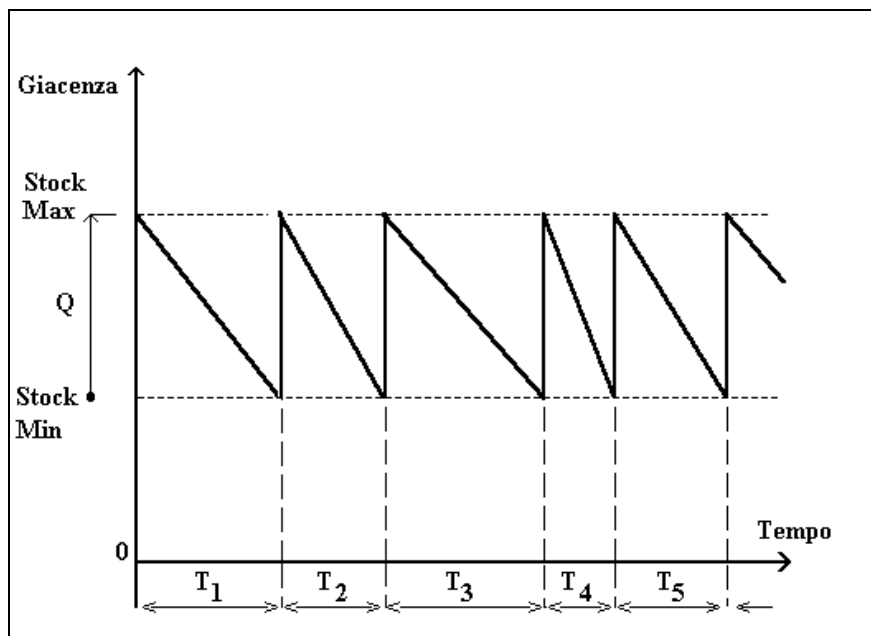
Questo metodo presenta il vantaggio di poter programmare "in automatico" i lotti in periodi determinati, ma tuttavia può comportare il rischio di condurre a casi di rottura dello stock con il conseguente verificarsi di una gestione costosa delle scorte.

In questo caso è bene prevedere nel sistema un livello di sicurezza dello stock che evidenzia il momento di rottura degli stock quando si scende al di sotto dello stesso.

2° caso:

**Figura n. 2.3**

**2° CASO - Gestione delle scorte con tempo di evasione nullo**  
*Approvvigionamento di lotti costanti in periodi variabili.*



- Quantità dei lotti → **Q = costante**
- periodi di approvvigionamento → **T<sub>1</sub>, T<sub>2</sub>, T<sub>3</sub>, T<sub>4</sub>, T<sub>5</sub>,.....**

Approvvigionamenti di lotti costanti **Q** in periodi variabili **T<sub>1</sub>, T<sub>2</sub>, T<sub>3</sub>, T<sub>4</sub>,.....**. Questo metodo evita di incorrere nel rischio della rottura dello stock e di avere una gestione delle scorte costosa in quanto esiste un livello minimo al di sotto del quale non si può scendere ma però non consente di avere una gestione degli ordini sistematica nel tempo ed automatica.

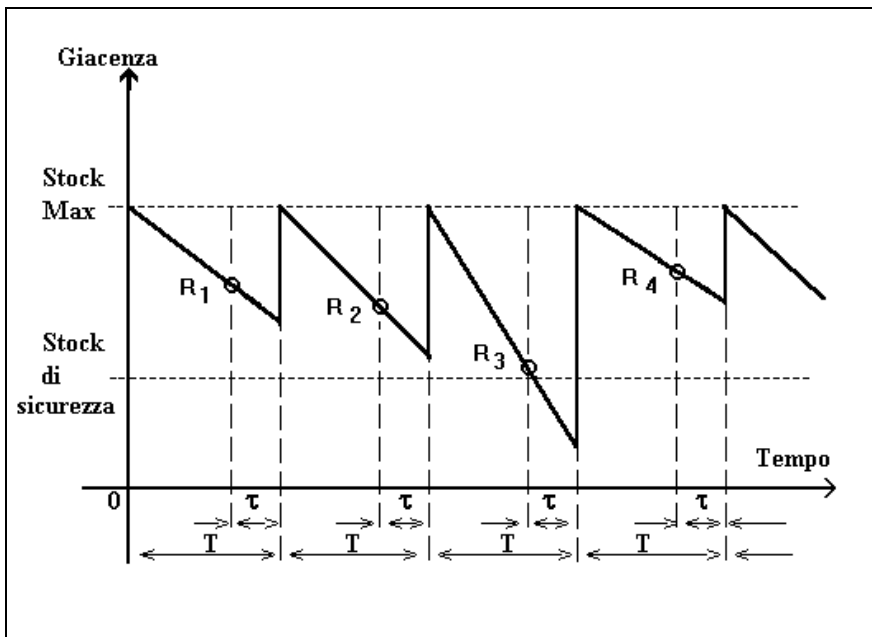
**B) Gestione con tempo di evasione dell'ordine non nullo**

*1° Caso:*

Approvvigionamenti in periodi costanti  $T$  di lotti in quantità variabile  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, \dots$  con tempo di evasione dell'ordine  $\tau$  costante (**Lead-Time**).

**Figura 2.4**

**1° CASO - Gestione delle scorte con tempo di evasione NON nullo**  
Evasione dell'ordine costante in periodi di approvvigionamento costanti.



- tempo di evasione dell'ordine  $\rightarrow \tau = \text{costante}$
- periodi di approvvigionamento  $\rightarrow T = \text{costante}$

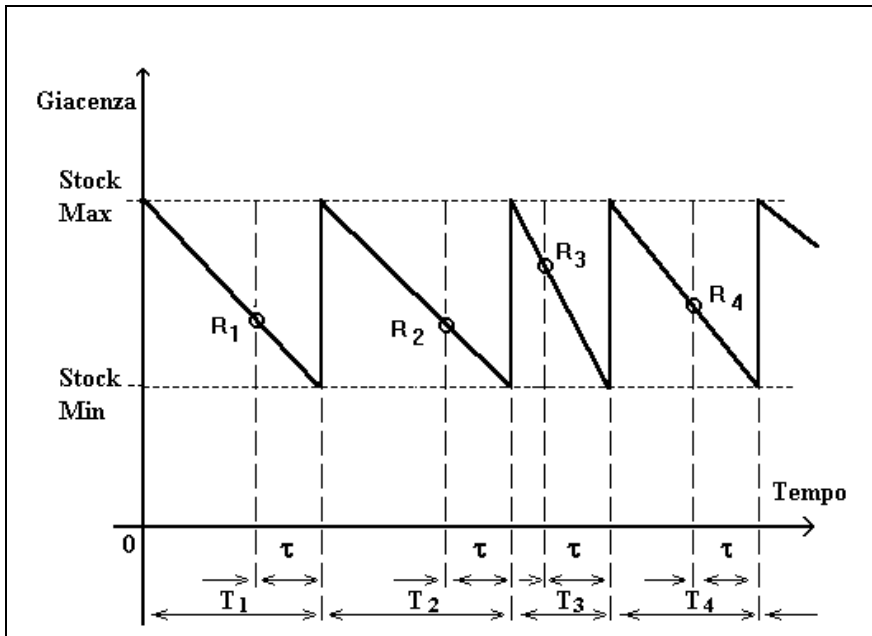
In questo caso la data per lanciare l'ordine è conosciuta in quanto sono programmabili a calendario periodi costanti di riapprovvigionamento, ma per ogni ciclo deve essere determinata la quantità del lotto di fornitura che è variabile, eseguendo degli inventari di magazzino e delle estrapolazioni sulla domanda dei prodotti nel periodo  $(T - \tau)$  che precede  $\tau$ . Inoltre si può sempre verificare il caso di rottura dello stock. I livelli delle scorte al momento della emissione dell'ordine  $R_1, R_2, R_3, R_4, ..$  sono variabili da periodo a periodo (**Reorder Point**).

*2 Caso:*

Approvvigionamenti di lotti costanti  $Q$  in periodi variabili  $T_1, T_2, T_3, T_4, .....$  con tempo di evasione dell'ordine  $\tau$  costante. In questo caso le quantità dei lotti sono costanti ma le date di lancio degli ordini sono sconosciute e devono essere pertanto determinate a mezzo di estrapolazioni che possono spesso essere insufficientemente precise.

**Figura 2.5**

**2° CASO - Gestione delle scorte con tempo di evasione NON nullo**  
*Tempo di evasione dell'ordine costante in periodi di approvvigionamento.*



- tempo di evasione dell'ordine →  $\tau = \text{costante}$
- periodi di approvvigionamento →  $T_1, T_2, T_3, T_4, \dots$

Le giacenze al momento del riordino  $R_1, R_2, R_3, R_4, \dots$  possono presentare sensibili variazioni da periodo a periodo.

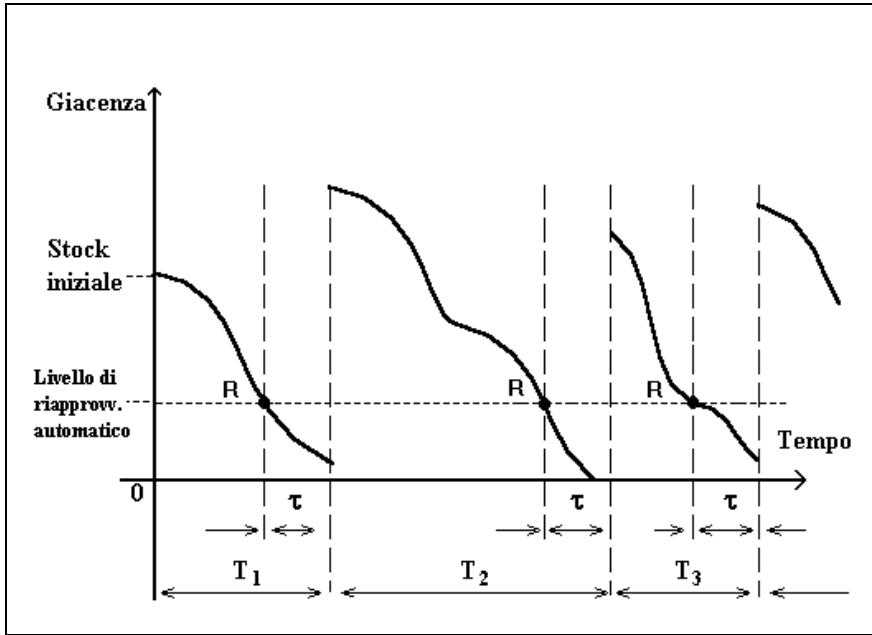
In certi casi potrebbero verificarsi anche situazioni in cui il tempo di evasione dell'ordine sia maggiore del periodo di riapprovvigionamento cioè ( $\tau > T$ ) e ciò complicherebbe la gestione degli stocks.

### 3 Caso:

Emissione in automatico dell'ordine di approvvigionamento di lotti costanti al raggiungimento delle scorte a un livello prefissato di riordino  $R$  con tempi di evasione  $\tau$  costanti. Questo metodo offre il vantaggio di una gestione comoda ma non evita il pericolo di rottura degli stocks in quanto dopo l'emissione "automatica" dello ordine si potrebbero avere elevate richieste dei prodotti che inaspettatamente potrebbero causare lo svuotamento del magazzino prima che arrivino i nuovi prodotti ordinati. Si potrebbero altresì verificare casi in cui le richieste, dopo l'avvenuta emissione dell'ordine, siano molto contenute con conseguente eccesso momentaneo di giacenza all'arrivo dei nuovi prodotti in magazzino. Detta gestione viene chiamata nel linguaggio anglosassone "**Two-Bin System**" (gestione dei due magazzini) o più comunemente "**s,S Policy**" (**Politica s,S**).

**Figura 2.6**

**3° CASO - Gestione delle scorte con tempo di evasione NON nullo**  
*Gestione automatica dell'ordine con tempo di evasione costante in periodi di approvvigionamento*



– tempo di evasione dell'ordine →  $\tau = \text{costante}$

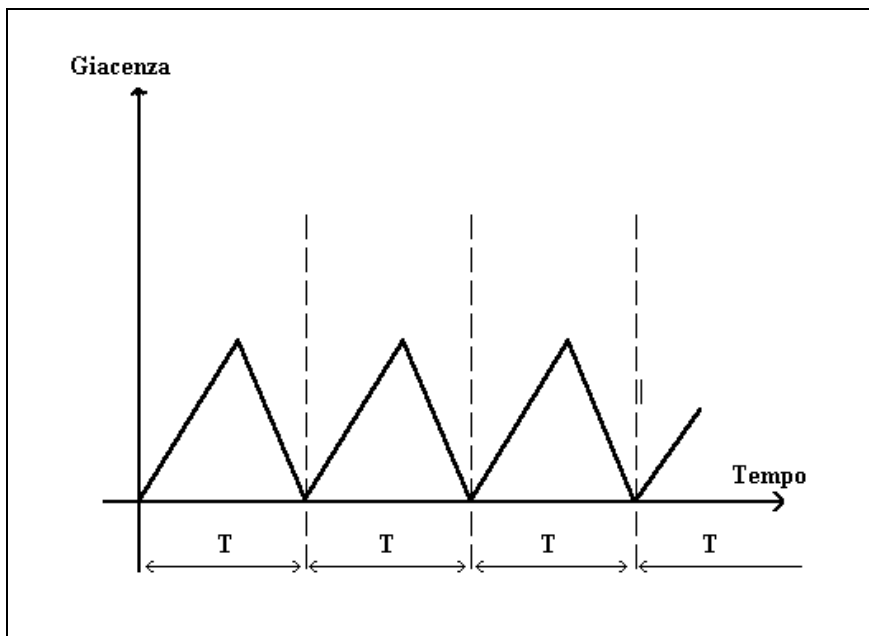
**C) Gestione con approvvigionamento continuo delle merci man mano che vengono prodotte.**

Questo metodo presuppone che la velocità di fornitura degli articoli sia sempre maggiore di quella di uscita degli stessi dal magazzino fino a quando è attivato il processo produttivo (punti di cresta nel grafico) in modo da garantire sempre uno stock fisico per fare fronte alla domanda.

Quando cessa il processo produttivo la giacenza decresce per effetto della richiesta esterna fino ad annullarsi alla fine del periodo programmato.

Dopo di che viene riattivato il processo produttivo per il successivo riapprovvigionamento del magazzino.

**Figura 2.7**  
**Gestione delle scorte con approvvigionamento continuo**



## 2.5 - PARAMETRI ECONOMICI.

I parametri più ricorrenti che vengono considerati nei modelli matematici delle scorte sono quelli di seguito indicati.

### A) *Costo di ordinazione o produzione:*

E' composto normalmente da due componenti che sono:

- *il costo di attivazione di un ciclo di approvvigionamento indipendente dalla quantità ordinata  $Q$ .* Detta componente viene indicata con  $K$  ed assume valore  $K = 0$  quando  $Q = 0$  ed un valore  $K > 0$  quando  $Q > 0$ . Essa è considerata come un costo iniziale e

comprende il costo amministrativo di ordinazione, il costo delle operazioni preliminari e ogni altra spesa di inizio di un ciclo produttivo;

- **il costo dipendente dalla quantità  $Q$  ordinata che è espresso analiticamente da una funzione di  $Q$ .** La forma più semplice di questa funzione è quella lineare con costo direttamente proporzionale al quantitativo ordinato cioè  $(c \cdot Q)$  ove  $c$  è il *costo marginale d'acquisizione di ogni articolo*. In relazione a quanto sopra il costo di ordinazione o produzione può essere così espresso:

$$C(Q) = \begin{cases} 0 & \text{per } Q=0 \\ K + (c \cdot Q) & \text{per } Q>0 \end{cases} \quad (2.5.1)$$

### **B) Costi di giacenza:**

Sono quelli associati alla permanenza dei prodotti in magazzino fino al momento della loro vendita o utilizzo. Si riferiscono al costo per lo spazio occupato, le spese assicurative e di vigilanza, le tasse attribuite al magazzino, il costo del denaro per l'immobilizzo dei prodotti e così via.

### **C) Costi di rottura delle scorte:**

Si verificano quando le scorte sono insufficienti per soddisfare le richieste dei prodotti. E' il caso in cui la domanda dei prodotti in un determinato momento supera la disponibilità delle scorte. Si possono avere tre alternative:

- **rifornirsi con urgenza** - il costo di penalità è dato dalla differenza tra i costi di rifornimento urgente e quelli di rifornimento ordinario;
- **rinunciare a soddisfare la richiesta** - è il caso di **non conservazione dell'ordine** (*no backlogging*). Il costo di penalità è dato dalla perdita del ricavo di vendita;
- **evadere la richiesta non appena la merce ordinata con procedura ordinaria sia disponibile** - è il caso conosciuto come **"conservazione dell'ordine"** (*back-logging*). Il costo di penalità

può essere valutato tenendo conto degli effetti negativi derivanti dalla sfiducia che si genera nei clienti nel concludere affari con la ditta fornitrice e nella loro riluttanza a ritirare la merce che arriva successivamente (costo calcolato in funzione dell'eccesso di quantità richiesta sulle scorte disponibili).

**D) Ricavi:**

Nei modelli matematici di scorte a domanda nota i ricavi vengono in genere trascurati essendo indipendenti dalle politiche di gestione delle scorte stesse. Un'eccezione in cui i ricavi vengono considerati nei modelli a domanda nota si ha quando l'azienda non può fare fronte alla richiesta dei prodotti e perde la vendita (caso di "**non conservazione dell'ordine**"). In questo caso però si include la perdita del profitto nel costo di penalità per la rottura dello stock. Nei modelli matematici probabilistici invece i ricavi vengono di solito considerati.

**E) Valore di recupero del prodotto:**

E' dato dal valore del prodotto inutilizzato alla fine del periodo di giacenza. Se la politica prescelta considera un numero indefinito di periodi e i prodotti non diventano obsoleti, non si considera il valore di recupero nel modello in quanto i prodotti inutilizzati alla fine di un periodo potranno essere utilizzabili nei periodi successivi. Se invece la politica si riferisce a un solo periodo, il valore di recupero è uguale a quanto si ricava dalla vendita al meglio del prodotto inutilizzato. In contrapposizione al valore di recupero può esserci un costo di recupero connesso alla vendita di un dato prodotto. In questo caso il costo di recupero viene conteggiato nei costi di giacenza.

**F) Tasso di sconto:**

Serve per tenere conto del costo del denaro nel tempo e viene indicato anche come "**fattore di sconto**"  $a$ . Nei casi di investimenti in scorte pluriennali occorre attualizzare i costi o i profitti derivanti dalla gestione del magazzino moltiplicandoli per  $a^1$ ,  $a^2$ ,  $a^3$ , ...,  $a^n$  al fine

di trovare il relativo valore atteso. Quando ci si riferisce a periodi brevi si può trascurare l'effetto del tasso di sconto. In questo caso, se la funzione matematica adottata prevede tale parametro, si può porre per convenzione  $a = 1$ .

## 2.6 - MODELLI MATEMATICI PER LA GESTIONE DELLE SCORTE.

I modelli matematici per la gestione delle scorte vengono definiti tenendo conto di tutti quei parametri significativi che consentono di controllare la realtà aziendale in cui questi devono essere applicati. Ciò vuol dire che in pratica ogni azienda deve crearsi il proprio modello di gestione. Nella letteratura esistono moltissimi algoritmi matematici di gestione.

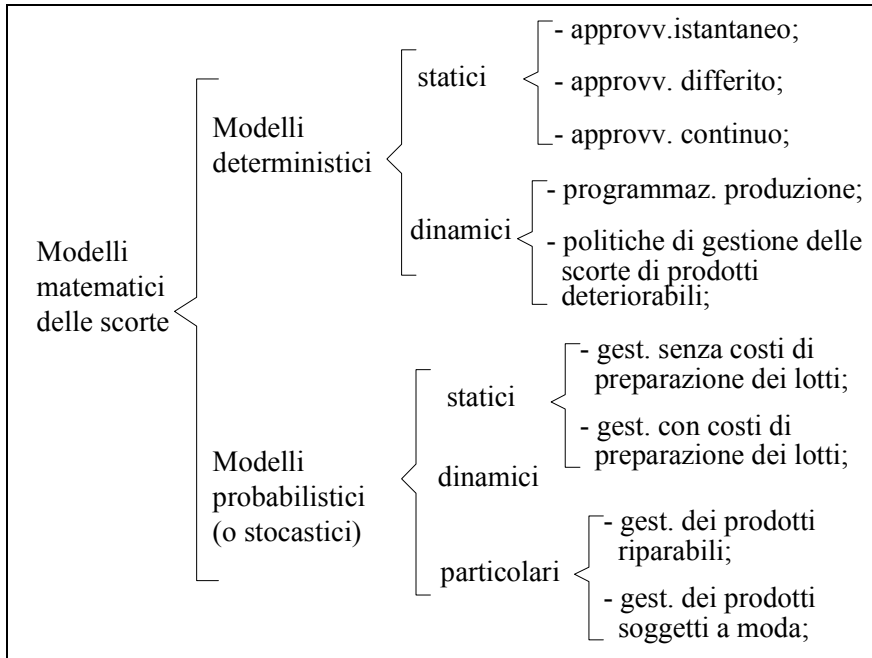
Sotto l'aspetto teorico questi possono essere classificati tenendo conto del *tipo di domanda dei prodotti* in:

- **modelli deterministici** - *quando la domanda dei prodotti è nota in un dato periodo;*
- **modelli probabilistici o stocastici** - *quando la domanda non è nota, ma può essere determinata come una variabile casuale con una distribuzione di probabilità conosciuta;*

oppure tenendo conto del *tipo di programmazione* adottata in:

- **modelli statici** - *quando la programmazione è limitata a un solo periodo o a più periodi, ma con parametri di programmazione costanti. Entrano in tale classificazione i modelli definiti per prodotti richiesti con domanda costante e riforniti in quantità e tempi costanti;*
- **modelli dinamici** - *quando la programmazione viene svolta su più periodi consecutivi con parametri di programmazione variabili. Entrano in tale classificazione i modelli di gestione di prodotti richiesti con domanda variabile nel tempo (vedasi schema riprodotto in figura 2.8.).*

*Figura n. 2.8*  
**Classificazione dei modelli matematici di scorte**



## 2.7 - MODELLI DETERMINISTICI STATICI.

### 2.7.1 - *Modelli per approvvigionamento istantaneo.*

*A) - Gestione senza rottura dello stock.*

Il problema consiste nel determinare i tempi di attivazione dei cicli produttivi e le quantità da produrre in modo tale che il costo per unità di tempo risulti minimo.

L'andamento grafico delle giacenze è rappresentato in figura 2.9.

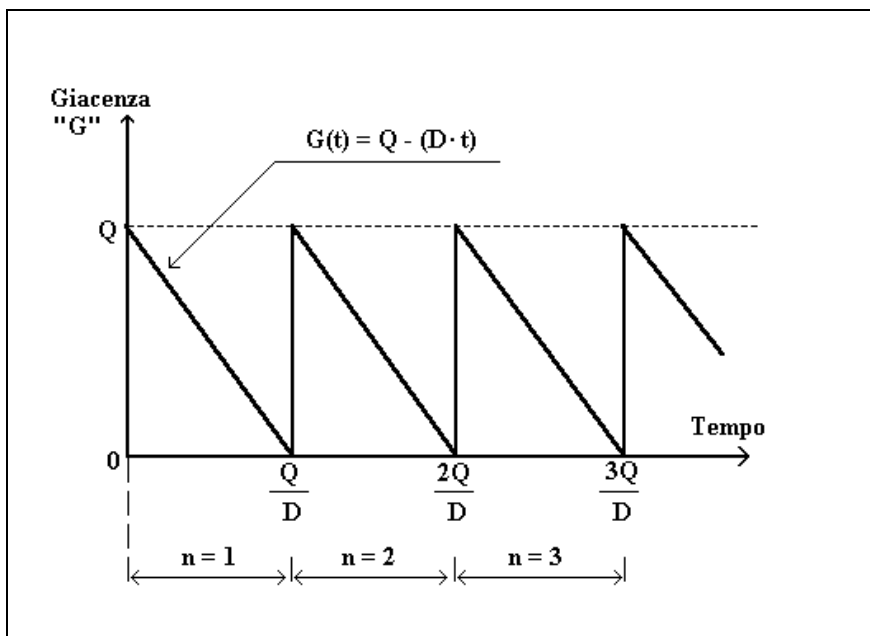
I parametri considerati nel modello, usando la terminologia ricorrente, sono i seguenti:

***Q*** - *quantità dell'ordine;*

- n** - numero cicli di approvvigionamento da programmare per la fornitura del quantitativo totale della merce;*
- T** - tempo per attivare un ciclo;*
- D** - tasso di domanda per unità di tempo (esprime la velocità costante di uscita della merce dal magazzino);*
- K** - costo fisso di approvvigionamento;*
- c** - costo marginale d'acquisto di una unità di merce;*
- h** - costo di giacenza per unità di merce e per unità di tempo;*
- C(Q)** - costo di ordinazione o produzione;*
- H(Q)** - costo totale di giacenza;*
- Ct(Q)** - costo totale di gestione dello stock;*
- Cu(Q)** - costo di gestione per unità di tempo;*
- D(t)** - funzione della domanda relativa all'intervallo di tempo **t**;*
- G(t)** - livello delle giacenze al tempo **t**;*
- Q\*** - quantità del lotto economico (**Economic Order Quantity** abbreviato **E.O.Q.** dalla letteratura anglosassone) che corrisponde al costo minimo.*
- n\*** - numero ottimale cicli di fornitura;*
- T\*** - tempo ottimale per attivare un ciclo;*
- Cu(Q\*)**-costo di gestione minimo per unità di tempo.*

L'algoritmo per la gestione dello stock, nel caso trattato, è quello di seguito descritto.

Figura n. 2.9  
*Andamento delle giacenze SENZA rottura dello stock*



$$C(Q) = \begin{cases} 0 & \text{se } Q = 0 \\ K + (c \cdot Q) & \text{se } Q > 0 \end{cases} \quad (2.7.1)$$

$$D(t) = D \cdot t \quad (2.7.2)$$

$$G(t) = (n \cdot Q) - (D \cdot t) \quad \begin{cases} \text{per } (n-1) \cdot \frac{Q}{D} < t \leq n \cdot \frac{Q}{D} \\ \text{dove } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (2.7.3)$$

$$H(Q) = h \cdot \int_0^{Q/D} G(t) \cdot dt = h \cdot \int_0^{Q/D} [Q - (D \cdot t)] \cdot dt = \quad (2.7.4)$$

$$\begin{aligned}
&= h \cdot \left[ Q \cdot t - \frac{D}{2} \cdot t^2 \right]_0^{Q/D} = h \cdot \left[ \left( Q \cdot \frac{Q}{D} \right) - \left( \frac{D}{2} \cdot \frac{Q^2}{D^2} \right) \right] = \\
&= h \cdot \left[ \frac{Q^2}{D} - \frac{Q^2}{2D} \right] = h \cdot \frac{Q^2}{2D}
\end{aligned}$$

Se ( $Q > 0$ ) il costo complessivo di gestione è:

$$Ct(Q) = C(Q) + H(Q) = K + (c \cdot Q) + \left( h \cdot \frac{Q^2}{2D} \right) \quad (2.7.5)$$

Il costo totale per unità di tempo è:

$$Cu(Q) = \frac{k + c \cdot Q + h \cdot \frac{Q^2}{2D}}{\frac{Q}{D}} = K \cdot \frac{D}{Q} + c \cdot D + h \cdot \frac{Q}{2} \quad (2.7.6)$$

Derivando  $Cu(Q)$  e ponendo  $\frac{dCu(Q)}{dQ} = 0$  si trova la quantità da ordinare corrispondente al costo minimo:

$$\frac{dCu(Q)}{dQ} = -K \cdot \frac{D}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0 \quad (2.7.7)$$

e quindi:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot D}{h}} \Rightarrow \text{"LOTTO ECONOMICO"} \quad (2.7.8)$$

Si possono trovare ora le altre formule necessarie per la gestione degli stocks:

$$T^* = \frac{Q^*}{D} = \sqrt{\frac{2K}{h \cdot D}} \quad (2.7.9)$$

$$n^* = \frac{D \cdot t}{Q^*} = t \cdot \sqrt{\frac{h \cdot D}{2K}} \quad (2.7.10)$$

$$Cu(Q^*) = \frac{K \cdot D}{Q^*} + C \cdot D + \frac{(Q^*) \cdot h}{2} = \quad (2.7.11)$$

$$= \frac{K \cdot D}{\sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot D}{h}}} + C \cdot D + \frac{h}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot D}{h}} =$$

$$= \sqrt{2h \cdot K \cdot D} + (C \cdot D)$$

La formula del lotto economico evidenzia che la quantità  $Q^*$  che minimizza il costo totale è direttamente proporzionale al costo fisso di attivazione del ciclo di approvvigionamento  $K$  e alla velocità di uscita della merce dal magazzino  $D$ , mentre è inversamente proporzionale al costo unitario di giacenza  $h$ .

*Analisi grafica:*

Si rappresenti su un grafico il costo totale per unità di tempo  $Cu(Q)$  ponendo sulle ascisse le quantità e sulle ordinate i valori. Si ottiene una curva concava che presenta un minimo con ascissa uguale alla ( $Q^*$ ) del lotto economico.

Sul grafico sono rappresentate anche le curve delle 3 sotto funzioni che compongono  $Cu(Q)$ , cioè:

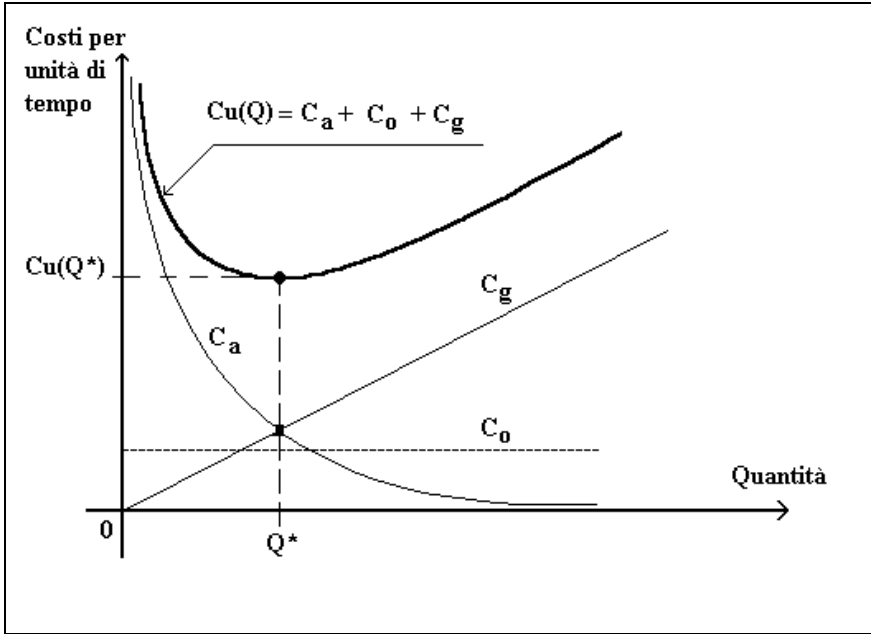
- **una iperbole equilatera** di equazione  $Ca = \frac{K \cdot D}{Q}$  che esprime l'incidenza del costo di attuazione dell'approvvigionamento per unità di tempo;
- **una retta parallela all'asse delle ascisse** di equazione  $Co = c \cdot D$  che indica il costo d'acquisto dei prodotti movimentati nell'unità di tempo;
- **una retta con andamento crescente che passa per l'origine degli assi** di equazione  $Cg = \frac{Q \cdot h}{2}$  che esprime il costo di giacenza nell'unità di tempo.

Nel punto di minimo della funzione  $Cu(Q)$  si incontrano le due funzioni  $Ca$  e  $Cg$ . Ciò vuol dire che il lotto economico  $Q$  si ha quando il costo unitario di approvvigionamento è uguale al costo unitario di giacenza, cioè:

$$Ca = Cg \Rightarrow \frac{K \cdot D}{Q} = \frac{Q \cdot h}{2} \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot D}{h}} = Q^* \quad (2.7.12)$$

Il costo d'acquisto dei prodotti, sebbene faccia aumentare il costo totale  $Cu(Q)$ , non influisce sulla quantità del lotto economico  $Q^*$ .

- Figura n. 2.10 -  
*Punto di costo minimo degli stocks.*



$$C_u(Q) = \frac{K D}{Q} + c D + \frac{h Q}{2}$$



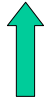
Costo  
gest.  
unità



Costo  
approvv.  
unità  
 $C_a$



Costo  
acquisto  
unità  
 $C_o$



Costo  
giacenza  
unità  
 $C_g$

### **Esercizio**

Un produttore di accessori per impianti ecologici riceve un ordine di fornire 120.000 filtri per depuratori delle acque industriali da consegnare nell'arco di un anno.

Con quale cadenza deve approvvigionare il suo stock di magazzino se non sono ammessi ritardi di fornitura?

Qual è il lotto economico e il costo totale dell'operazione?

La domanda del grossista che rivende i filtri al dettaglio è a tasso costante e i costi sono:

$$K = \text{L.}30.000.000$$

$$C = \text{L.}100.000 \text{ al filtro}$$

$$h = \text{L.}350 \text{ al giorno per ogni filtro}$$

### **Soluzione:**

$$D = \frac{120.000 \text{ filtri}}{360 \text{ giorni}} = 333,34 \text{ filtri-giorno}$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot D}{h}} = \sqrt{(2 \cdot 30.000.000 \cdot 333,34) : 350} = 7.559 \text{ filtri}$$

$$T^* = \sqrt{\frac{2 \cdot K}{h \cdot D}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 30.000.000}{350 \cdot 333,34}} = 22,68 \text{ gg.}$$

$$n^* = \frac{D \cdot 360}{Q^*} = \frac{333,34 \cdot 360}{7.559} = 15,88 \text{ cicli}$$

$$\begin{aligned} Ct(Q^*) &= C_u(Q^*) \cdot 360 = (\sqrt{2hKD} + CD) \cdot 360 = \\ &= \sqrt{2 \times 350 \times 30.000.000 \times 333,34} + (100.000 \times 333,34) \cdot 360 = 12.952 \text{ milioni} \end{aligned}$$

E' importante ora verificare la sensibilità della funzione dei costi al fine di valutare di quanto aumenta il costo se negli approvvigionamenti si effettuano variazioni di  $Q^*$  in più o in meno. Si

consideri uno scarto di (+/-)10% di  $Q^*$  cioè di (+/-)756 filtri. Si ottengono le quantità:

$$Q' = 7559 - 756 = 6.803$$

$$Q'' = 7559 + 756 = 8.315$$

$$Ct'(6.803) =$$

$$\left[ \frac{30.000.000 \times 333,34}{6.803} + 100.000 \times 333,34 + \frac{350 \times 6.803}{2} \right] \times 360 = 12.958 \text{ milioni}$$

$$Ct''(8.315) =$$

$$\left[ \frac{30.000.000 \times 333,34}{8.315} + 100.000 \times 333,34 + \frac{350 \times 8.315}{2} \right] \times 360 = 12.957 \text{ milioni}$$

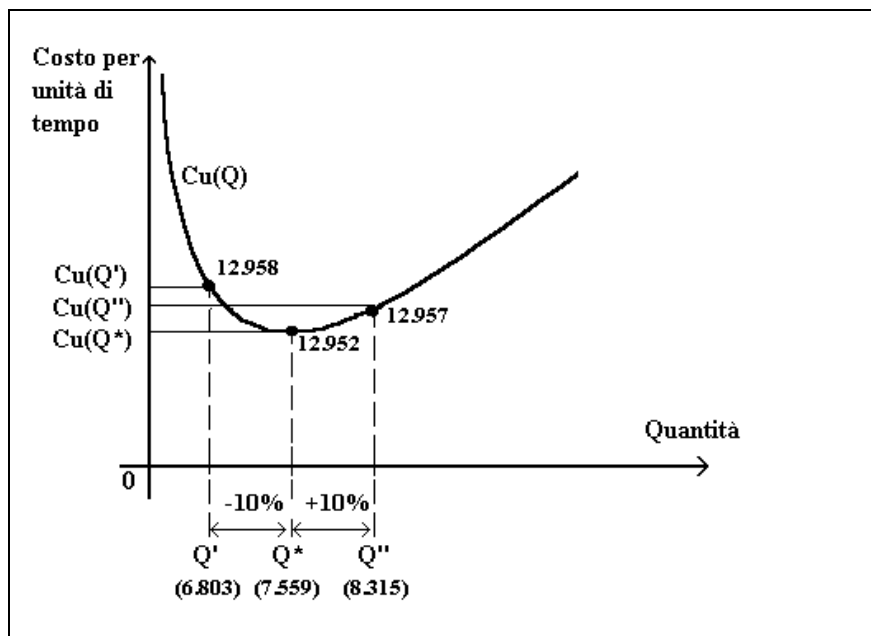
Si può calcolare la deviazione percentuale dei costi relativi allo scarto del 10% dalla  $Q^*$  eseguendo la seguente operazione:

$$\frac{\frac{Cu(6.803) + Cu(8.315)}{2}}{Cu(7.559)} - 1 = \frac{[12.958 + 12.957]}{12.952} - 1 = 0,0004 \Rightarrow 0,04\%$$

Si può constatare che la suddetta variazione di (+/-)10% da  $Q^*$  porta a un aumento dei costi di solo lo 0,04%, quindi la sensibilità della funzione è molto bassa.

In conclusione si può dire che il produttore di accessori per impianti ecologici deve programmare 16 ordini di produzione nell'arco dell'anno con approvvigionamento ogni 22/23 giorni con lotti di 7.559 filtri a cui corrisponde un costo annuo di 12 miliardi e 952 milioni.

Figura n 2.11  
Analisi grafica della sensibilità



*B) - Gestione con rottura dello stock.*

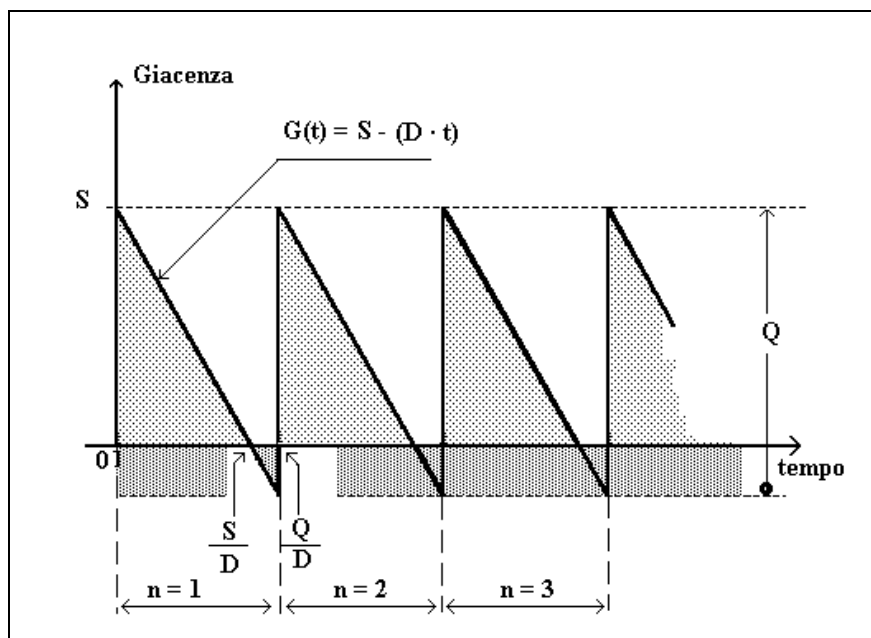
Il caso è una estensione del modello precedente che si verifica quando le richieste dei prodotti in un certo periodo vengono fatte senza che vi sia giacenza a magazzino (*rottura dello stock*) e le stesse vengono soddisfatte quando viene consegnato il lotto all'inizio del periodo successivo. (vedasi il caso di figura 2.12).

I parametri considerati nel modello sono i seguenti:

- $S$       giacenza all'inizio di un periodo;
- $Q$       quantità dell'ordine;
- $\rho$       costo di rottura dello stock per ogni richiesta non evasa e per unità di tempo (costo penuria);
- $\bar{Q}$       quantità del lotto economico (**Economic Order Quantity**);

- $\bar{S}$  giacenza all'inizio del periodo di approvvigionamento del lotto economico;
- $T$  tempo per attivare un ciclo di fornitura;
- $H(Q,S)$  costo totale di giacenza;
- $P(Q,S)$  costo di penuria;
- $Ct(Q,S)$  costo totale di gestione;
- $Cu(Q,S)$  costo di gestione per unità di tempo;
- $\bar{n}$  numero ottimale di cicli di approvvigionamento da attivare nel periodo di programmazione;
- $Cu(\bar{Q}, \bar{S})$  costo unitario di gestione relativo al E.O.Q.;

Figura n. 2.12  
*Andamento delle giacenze con rottura delle scorte.*



La funzione  $G(t)$  è riportata nel grafico di figura 2.12 dove la parte evidenziata sotto l'asse delle ascisse indica la zona delle giacenze negative, che rappresentano gli impegni cui far fronte al più presto:

$$G(t) = S + (n-1) \cdot Q - D \cdot t \quad (2.7.13)$$

dove  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

In un generico periodo il costo totale di giacenza è:

$$\begin{aligned} H(Q, S) &= h \cdot \int_0^{\frac{S}{D}} G(t) \cdot dt = h \cdot \int_0^{\frac{S}{D}} (S - D \cdot t) \cdot dt = \quad (2.7.14) \\ &= h \cdot \left[ S \cdot t - D \cdot \frac{t^2}{2} \right]_0^{\frac{S}{D}} = h \cdot \left[ S \cdot \frac{S}{D} - \left( \frac{D}{2} \cdot \frac{S^2}{D^2} \right) \right] = \\ &= h \cdot \left[ \frac{S^2}{D} - \frac{S^2}{2D} \right] = h \cdot \frac{S^2}{2D} \end{aligned}$$

Il costo di penuria è:

$$\begin{aligned} P(Q, S) &= -p \cdot \int_{\frac{S}{D}}^{\frac{Q}{D}} (S - D \cdot t) \cdot dt = -p \cdot \left[ S \cdot t - \frac{D \cdot t^2}{2} \right]_{\frac{S}{D}}^{\frac{Q}{D}} = \quad (2.7.15) \\ &= -p \cdot \left[ \left( \frac{S \cdot Q}{D} - \frac{D \cdot Q^2}{2 \cdot D^2} \right) - \left( S \cdot \frac{S}{D} - D \cdot \frac{S^2}{2D^2} \right) \right] = \\ &= -p \cdot \left\{ - \left[ \frac{Q^2 - 2 \cdot S \cdot Q + S^2}{2D} \right] \right\} = p \cdot \frac{(Q - S)^2}{2D} \end{aligned}$$

Il costo complessivo è quindi (se  $Q > 0$ ):

$$Ct(Q) = C(Q) + H(Q, S) + P(Q, S) = \quad (2.7.16)$$

$$= [K + c \cdot Q] + \left[ \frac{h \cdot S^2}{2D} \right] + \left[ p \cdot \frac{(Q-S)^2}{2D} \right]$$

Il costo totale per unità di tempo è:

$$Cu(Q,S) = \frac{Ct(Q,S)}{\frac{Q}{D}} = \frac{D}{Q} \cdot \left[ K + c \cdot Q + \frac{h \cdot S^2}{2D} + p \cdot \frac{(Q-S)^2}{2D} \right] = \quad (2.7.17)$$

$$= \frac{D \cdot K}{Q} + c \cdot D + \frac{h \cdot S^2}{2Q} + p \cdot \frac{(Q-S)^2}{2Q}$$

Uguagliando a zero le derivate parziali prime di  $F(Q,S)$  rispetto a  $Q$  ed a  $S$  si trova  $\bar{Q}$  e  $\bar{S}$ :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial Cu(Q,S)}{\partial Q} &= -\frac{D \cdot K}{Q^2} - \frac{2 \cdot h \cdot S^2}{4Q^2} + \frac{[4p \cdot Q \cdot (Q-S) - 2p \cdot (Q-S)^2]}{4Q^2} = \\ &= -\frac{D \cdot K}{Q^2} - \frac{h \cdot S^2}{2Q^2} + p \cdot \frac{(Q-S)}{Q} - p \cdot \frac{(Q-S)^2}{2Q^2} \end{aligned} \right. \quad (2.7.18)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial Cu(Q,S)}{\partial S} &= \frac{2h \cdot S}{2Q} - \frac{2p \cdot (Q-S)}{2Q} = \frac{h \cdot S}{Q} - p \cdot \frac{(Q-S)}{Q} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} p \cdot \bar{Q}^2 - (h + p) \cdot \bar{S}^2 - 2D \cdot K &= 0 & (1) \\ p \cdot \bar{Q} - (h + p) \cdot \bar{S} &= 0 & (2) \end{aligned} \right. \quad (2.7.19)$$

$$\begin{cases} \bar{S} = \frac{p \cdot \bar{Q}}{(h+p)} & (2) \\ p \cdot \bar{Q}^2 - \frac{(h+p) \cdot p^2 \cdot \bar{Q}^2}{(h+p)^2} - 2D \cdot K = 0 & (1) \end{cases} \quad (2.7.20)$$

$$\begin{cases} \bar{Q}^2 = \frac{2D \cdot K(h+p)}{h \cdot p} & (1) \Rightarrow \bar{Q} = \sqrt{\frac{2D \cdot K \cdot (h+p)}{h \cdot p}} \\ \bar{S} = \frac{p \cdot \bar{Q}}{(h+p)} & (2) \Rightarrow \bar{S} = \sqrt{\frac{2D \cdot K \cdot p}{h \cdot (h+p)}} \end{cases} \quad (2.7.21)$$

Si possono ora trovare le altre formule per la gestione degli stocks:

$$\bar{T} = \frac{\bar{Q}}{D} = \sqrt{\frac{2K \cdot (p+h)}{h \cdot p \cdot D}} \quad (2.7.22)$$

$$\bar{n} = \frac{D \cdot t}{\bar{Q}} \quad (2.7.23)$$

$$\begin{aligned} Cu(\bar{Q}, \bar{S}) &= \frac{D}{\bar{Q}} \cdot \left[ K + c \cdot \bar{Q} + \frac{h \cdot \bar{S}^2}{2D} + \frac{p \cdot (\bar{Q} - \bar{S})^2}{2D} \right] = \quad (2.7.24) \\ &= \frac{D \cdot K}{\bar{Q}} + c \cdot D + \frac{h \cdot \bar{S}^2}{2\bar{Q}} + \frac{p \cdot (\bar{Q} - \bar{S})^2}{2\bar{Q}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{D \cdot K}{\bar{Q}} + c \cdot D + \frac{h \cdot \bar{S}^2}{2\bar{Q}} + \frac{p \cdot \bar{Q}^2}{2\bar{Q}} - \frac{2p \cdot \bar{Q} \cdot \bar{S}}{2\bar{Q}} + \frac{p \cdot \bar{S}^2}{2\bar{Q}} = \\
&= \frac{D \cdot K}{\bar{Q}} + \frac{h \cdot \bar{S}^2}{2\bar{Q}} + \frac{p \cdot \bar{Q}}{2} - p \cdot \bar{S} + \frac{p \cdot \bar{S}^2}{2\bar{Q}} + c \cdot D = \\
&= \frac{D \cdot K}{\bar{Q}} + \frac{(h+p) \cdot \bar{S}^2}{2\bar{Q}} - p \cdot \bar{S} + \frac{p \cdot \bar{Q}}{2} + c \cdot D = \\
&= \sqrt{\frac{D^2 \cdot K^2 \cdot h \cdot p}{2K \cdot D \cdot (h+p)}} + \sqrt{\frac{(h+p)^2 \cdot 4 \cdot K^2 \cdot p^2 \cdot D^2 \cdot h \cdot p}{4h^2 \cdot (h+p)^2 \cdot 2K \cdot D \cdot (h+p)}} + \\
&\quad - \sqrt{\frac{p^2 \cdot 2 \cdot K \cdot p \cdot D}{h \cdot (h+p)}} + \sqrt{\frac{p^2 \cdot 2K \cdot D \cdot (h+p)}{4h \cdot p}} + c \cdot D = \\
&= h \cdot \sqrt{\frac{D \cdot K \cdot p}{2h \cdot (h+p)}} + p \cdot \sqrt{\frac{D \cdot K \cdot p}{2h \cdot (h+p)}} + \\
&\quad - 2p \cdot \sqrt{\frac{2D \cdot K \cdot p}{2h \cdot (h+p)}} + (h+p) \cdot \sqrt{\frac{D \cdot K \cdot p}{2h \cdot (h+p)}} + c \cdot D = \\
&= \sqrt{\frac{D \cdot K \cdot p}{2h \cdot (h+p)}} \cdot (h+p - 2p + h+p) + c \cdot D = \\
&= \sqrt{\frac{D \cdot K \cdot p \cdot 4h^2}{2h \cdot (h+p)}} + c \cdot D = \\
&= \sqrt{\frac{2D \cdot K \cdot p \cdot h}{(h+p)}} + c \cdot D = Cu(\bar{Q}, \bar{S})
\end{aligned}$$

*Osservazioni*

- 1) Se si calcola la media geometrica di  $\bar{Q}$  ed  $\bar{S}$  si nota che è uguale a  $Q^*$  trovato nel modello precedente. Infatti:

$$\sqrt{\bar{Q} \cdot \bar{S}} = \sqrt{\sqrt{\frac{2D \cdot K(h+p)}{h \cdot p}} \cdot \sqrt{\frac{2D \cdot K \cdot p}{h \cdot (h+p)}}} = \quad (2.7.25)$$

$$= \sqrt{\sqrt{\frac{4D^2 \cdot K^2}{h^2}}} = \sqrt{\frac{2D \cdot K}{h}} = Q^* \Rightarrow \text{(Lotto economico)}$$

Ciò vuol dire che  $Q^*$  è sempre compreso tra  $\bar{Q}$  e  $\bar{S}$  e non supera mai la loro media aritmetica, cioè:

$$Q^* \leq \frac{\bar{Q} + \bar{S}}{2} \quad (2.7.26)$$

Ovviamente, per valori di "  $p \rightarrow \infty$  "  $\bar{Q}$  e  $Q^*$  tendono a coincidere; cioè solo quando il costo di penuria è molto grande (caso in cui non sono ammesse rotture dello stock).

- 2) Il costo per unità di tempo  $Cu(Q^*)$  è maggiore di  $Cu(\bar{Q}, \bar{S})$ . Ciò risulta dal confronto delle due formule corrispondenti ove si nota che nella prima formula appare sotto radice il prodotto  $(2D \cdot K \cdot h)$ , mentre nella seconda detto prodotto è diviso per  $\left(1 + \frac{h}{p}\right) > 1$ :

$$Cu(Q^*) = \sqrt{2D \cdot K \cdot h} + c \cdot D \quad (2.7.27)$$

$$Cu(\bar{Q} \cdot \bar{S}) = \sqrt{\frac{2D \cdot K \cdot p \cdot h}{(h+p)}} + c \cdot D \quad (2.7.28)$$

$$= \sqrt{\frac{2D \cdot K \cdot h}{\left(1 + \frac{h}{p}\right)}} + c \cdot D$$

3) Osservando il grafico delle giacenze si nota che la frazione di tempo in cui non vi sono rotture delle scorte è data da:

$$\frac{\bar{S}/D}{\bar{Q}/D} = \frac{\bar{S}}{\bar{Q}} = \frac{\sqrt{\frac{2D \cdot K \cdot p}{h \cdot (h+p)}}}{\frac{\sqrt{2D \cdot K \cdot (h+p)}}{h \cdot p}} = \frac{p}{h+p} = \frac{1}{\frac{h}{p} + 1} \quad (2.7.29)$$

Ciò evidenzia che detta frazione di tempo è indipendente dal costo di approvvigionamento  $K$  e dalla velocità di uscita della merce dal magazzino  $D$ . Essa invece è inversamente proporzionale al costo unitario di giacenza  $h$  e direttamente proporzionale al costo di penuria  $p$ .

Come si è già osservato nel primo modello il costo marginale di acquisto (o produzione) delle merci non figura nelle formule risolutive dei lotti economici. Ciò è evidente poiché è indipendente dalla politica adottata per la gestione degli stock. La domanda dei prodotti è sempre la stessa e quindi si dovrà ordinare (o produrre) complessivamente la stessa quantità al medesimo costo. Queste osservazioni valgono anche per i ricavi che pertanto possono essere trascurati nel modello.

### ***Esercizio***

Si supponga che nel caso trattato nel precedente esercizio ( $D = 333,34$ ,  $K = 30.000.000$ ,  $c = 100.000$ ,  $h = 350$ ) sia ammessa la possibilità di rottura dello stock con un costo di penuria di  $p = (10 \cdot h) = 3.500$  Lire al giorno per ogni filtro.

Si determini il livello di  $\bar{Q}$ ,  $\bar{S}$ , la cadenza di fornitura  $\bar{T}$ , il numero di ordini  $\bar{n}$  e il costo totale  $Ct(\bar{Q}, \bar{S})$ .

*Soluzione*

$$\begin{aligned}\bar{Q} &= \sqrt{\frac{2D \cdot K \cdot (h + p)}{h \cdot p}} = \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 333,34 \cdot 30.000.000 \cdot (350 + 3.500)}{350 \cdot 3.500}} = \\ &= 7.928 \text{ filtri} \\ \bar{S} &= \sqrt{\frac{2D \cdot K \cdot p}{h \cdot (h + p)}} = \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 333,34 \cdot 30.000.000 \cdot 3.500}{350 \cdot (350 + 3.500)}} = \\ &= 7.208 \text{ filtri} \\ \bar{T} &= \sqrt{\frac{2K \cdot (h + p)}{D \cdot h \cdot p}} = \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 30.000.000 \cdot (350 + 3.500)}{333,34 \cdot 350 \cdot 3.500}} = 23,78 \text{ giorni} \\ \bar{n} &= \frac{D \cdot t}{\bar{Q}} = \frac{333,34 \cdot 360}{7.928} = 15,14 \text{ cicli}\end{aligned}$$

$$Ct(\bar{Q}, \bar{S}) = \left[ \sqrt{\frac{2K \cdot D \cdot p \cdot h}{(h+p)}} + c \cdot D \right] \cdot 360 =$$

$$= \left\{ \sqrt{\frac{2 \cdot 333,34 \cdot 30.000.000 \cdot 350 \cdot 3.500}{350 + 3.500}} + 100.000 \cdot 333,34 \right\} \cdot 360 = 12.908 \text{ L.milioni}$$

Dai risultati così trovati emerge che la media geometrica di  $\bar{Q}$  ed  $\bar{S}$  è uguale a  $Q^*$ :

$$\sqrt{\bar{Q} \cdot \bar{S}} = \sqrt{7.928 \cdot 7.208} = 7.559 \quad \Leftarrow \Leftarrow \quad Q^* \quad (\text{vedasi esercizio precedente})$$

e che la loro media aritmetica è maggiore di  $Q^*$ :

$$(7.928 + 7.208) / 2 = 7568 > Q^* = 7.559$$

Inoltre si rileva che il costo  $Ct(\bar{Q}, \bar{S})$  è minore di  $Ct(Q^*)$ :

$$Ct(\bar{Q}, \bar{S}) = 12.908 \text{ L.milioni} < Ct(Q^*) = 12.952 \text{ L.milioni}$$

Quanto sopra lascia presupporre che una politica che consenta di avere una certa percentuale di consegne ritardate sia economicamente più conveniente di una politica che garantisca sempre la soddisfazione della domanda.

In pratica però i calcoli di convenienza non sono sempre così semplici, soprattutto perché l'ipotesi di linearità a cui si è semplicemente fatto ricorso per la funzione dei costi di penuria, vale solo entro limiti molto stretti.

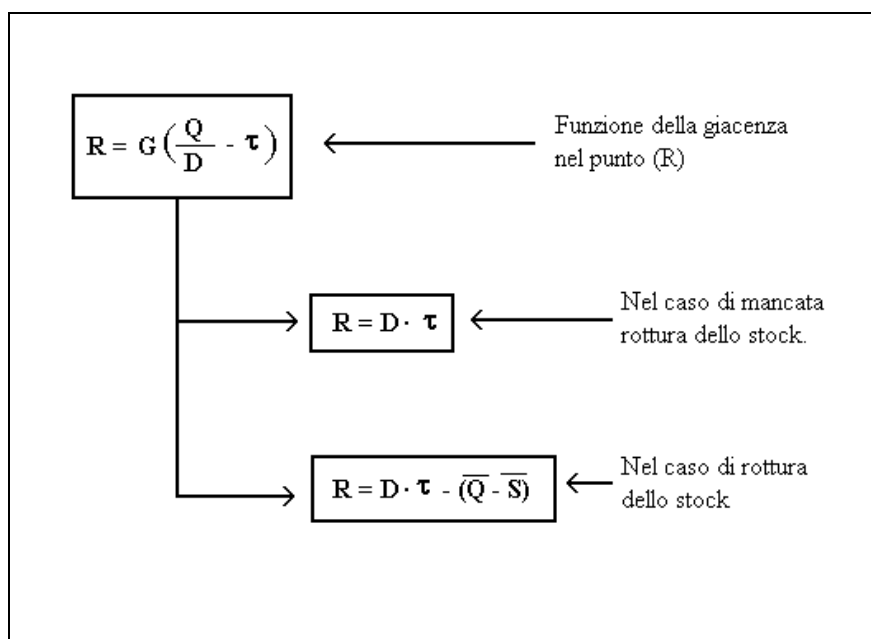
Oltre un certo livello di rottura degli stock infatti i costi di penuria crescono più che proporzionalmente delle richieste inevase, per tener

conto delle perdite indirette che subisce il venditore, ad esempio per la mancata vendita di altri prodotti.

### 2.7.2 - Modelli per approvvigionamento differito nel tempo.

Se si considera il caso in cui il tempo di approvvigionamento sia diverso da zero il problema non cambia sostanzialmente rispetto ai casi trattati precedentemente (vedasi figura 2.13).

Se si considera un tempo di approvvigionamento costante  $\tau$  (**Lead Time**), si tratta solo di determinare il livello di riordino  $R$  (**Reorder Point**) in cui emettere l'ordine in modo tale che le consegne siano effettuate negli istanti richiesti:



Infatti, osservando l'andamento grafico di figura 2.13, si ottiene:

$$G(t) = \bar{S} - D t \quad (2.7.30)$$

Tempo corrispondente al punto  $\bar{R} = \frac{\bar{Q}}{D} \cdot \tau$

$$\bar{R} = \bar{S} - D \cdot \left( \frac{\bar{Q}}{D} - \tau \right) = \bar{S} - \bar{Q} + D \cdot \tau = D \cdot \tau - (\bar{Q} - \bar{S}) \quad (2.7.31)$$

Nel caso particolare di mancata rottura dello stock si ha  $\bar{Q} = \bar{S}$  e pertanto la precedente formula si riduce a:

$$R = D \cdot \tau \quad (2.7.32)$$

### ***Esercizio***

Si supponga che nei due casi visti in precedenza l'approvvigionamento non avvenga istantaneamente, ma richieda un tempo tecnico di  $\tau = 6$  giorni.

### ***Soluzione***

Si avrà:

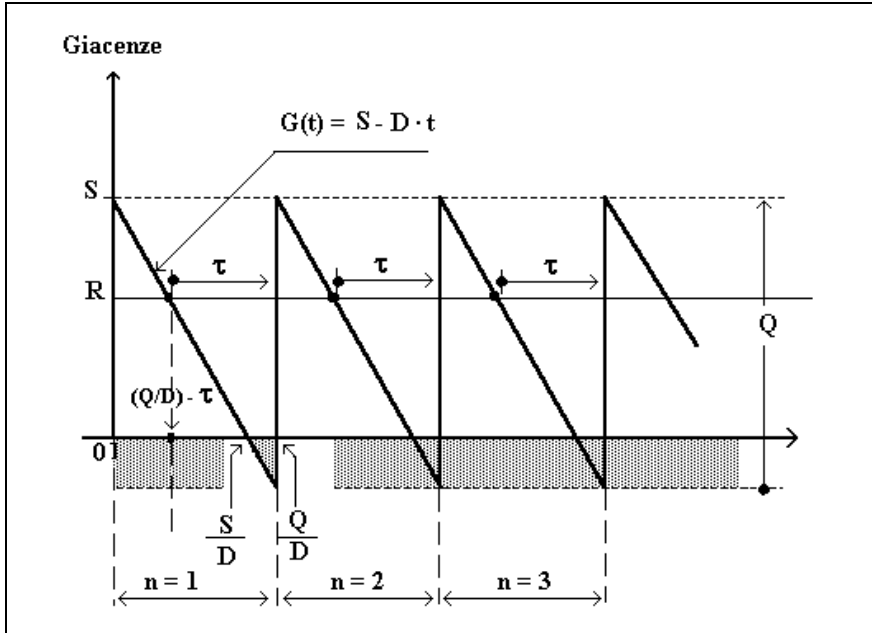
- nel caso di mancata rottura dello stock

$$R = D \cdot \tau = 333,34 \cdot 6 = 2.000 \text{ filtri}$$

- nel caso di rottura dello stock

$$R = D \cdot \tau - (\bar{Q} - \bar{S}) = (333,34 \cdot 6) - (7.928 - 7.208) = 1280 \text{ filtri}$$

Figura n. 2.13  
*Andamento delle giacenze con livello di riordino.*



### 2.7.3 - Modelli per approvvigionamento continuo nel tempo.

Il caso si verifica quando le quantità ordinate vengono consegnate gradualmente man mano che vengono prodotte.

Per semplicità considereremo solo il caso in cui non sono ammesse rotture dello stock (figura 2.14). I parametri sono:

$M$  volume di produzione realizzata nell'unità di tempo che si suppone  $M > D$ ;

$Q$  quantità da produrre;

$Q^\circ$  quantità del lotto economico;

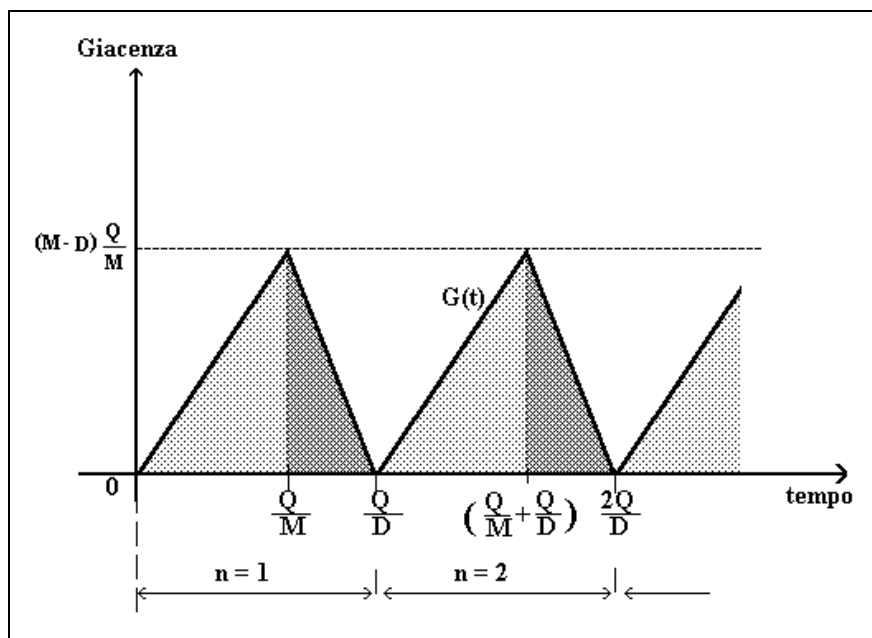
$T^\circ$  tempo ottimale per ciclo di programmazione;

$n^\circ$  numero ottimale di cicli di programmazione;

$Cu(Q^\circ)$  costo di gestione per unità di tempo corrispondente al lotto economico.

La lunghezza del ciclo produttivo è  $(Q/M)$ . In questo periodo il livello delle scorte aumenta ad un tasso  $(M-D)$  sino al raggiungimento di un massimo pari a  $[(M - D) \cdot Q/M]$  al termine del ciclo. A questo punto la produzione viene interrotta e sino all'istante  $(Q/D)$  il livello delle scorte diminuisce con tasso  $D$ .

Figura n. 2.14  
Andamento delle giacenze nel caso di produzione continua.



Il livello delle giacenze è dato da:

$$G(t) = \begin{cases} (M-D) \cdot t - (n-1) \cdot (M-D) \cdot \frac{Q}{D} \Rightarrow (n-1) \cdot \frac{Q}{D} \leq t < \frac{Q}{M} + (n-1) \cdot \frac{Q}{D} \\ n \cdot Q - D \cdot t \Rightarrow \frac{Q}{M} + (n-1) \cdot \frac{Q}{D} \leq t < \frac{n \cdot Q}{D} \end{cases} \quad (2.7.33)$$

con  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

Il costo di giacenza per un generico periodo è:

$$\begin{aligned}
 H(Q) &= h \cdot \int_0^{\frac{Q}{M}} (M - D) \cdot t \cdot dt + h \cdot \int_{\frac{Q}{M}}^{\frac{Q}{D}} (Q - D \cdot t) \cdot dt = \quad (2.7.34) \\
 &= h \cdot Q^2 \cdot \frac{(M - D)}{2M \cdot D}
 \end{aligned}$$

ed il costo unitario di giacenza e di emissione ordini è:

$$C_u(Q) = \frac{C(Q) + H(Q)}{\frac{Q}{D}} = \frac{K \cdot D}{Q} + c \cdot D + \frac{h \cdot Q \cdot (M - D)}{2 \cdot M} \quad (2.7.35)$$

Derivando  $C_u(Q)$  rispetto a  $Q$ , uguagliando a zero e risolvendo per  $Q$  si trova la quantità da ordinare corrispondente al costo minimo:

$$Q^\circ = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot D}{h \cdot \left(1 - \frac{D}{M}\right)}} \quad (2.7.36)$$

$$T^\circ = \frac{Q^\circ}{D} = \sqrt{\frac{2 \cdot K}{h \cdot D \cdot \left(1 - \frac{D}{M}\right)}} \quad (2.7.37)$$

$$n^\circ = \frac{D \cdot t}{Q^\circ} \quad (2.7.38)$$

$$Cu(Q^o) = \sqrt{2h \cdot K \cdot D \cdot \left(1 - \frac{D}{M}\right)} + c \cdot D \quad (2.7.39)$$

*Sviluppo formule:*

$$\begin{aligned} H(Q) &= h \cdot \int_0^{\frac{Q}{M}} (M-D) \cdot t \cdot dt + h \cdot \int_{\frac{Q}{M}}^{\frac{Q}{D}} (Q-D \cdot t) \cdot dt = \quad (2.7.40) \\ &= h \cdot \left[ \frac{(M-D) \cdot t^2}{2} \right]_0^{\frac{Q}{M}} + h \cdot \left[ Q \cdot t - \frac{D \cdot t^2}{2} \right]_{\frac{Q}{M}}^{\frac{Q}{D}} = \\ &= h \cdot \left\{ \left[ \frac{(M-D)}{2} \cdot \left(\frac{Q}{M}\right)^2 \right] + \left[ Q \cdot \frac{Q}{D} - \frac{D}{2} \cdot \left(\frac{Q}{D}\right)^2 \right] - \left[ Q \cdot \frac{Q}{M} - \frac{D}{2} \cdot \left(\frac{Q}{M}\right)^2 \right] \right\} = \\ &= h \cdot \left[ \left(\frac{(M-D)}{2}\right) \cdot \frac{Q^2}{M^2} + \frac{Q^2}{D} - \frac{Q^2}{2 \cdot D} - \frac{Q^2}{M} + \frac{D \cdot Q^2}{2 \cdot M^2} \right] = \\ &= h \cdot Q^2 \cdot \frac{D \cdot M - D^2 + 2 \cdot M^2 - M^2 - 2D \cdot M + D^2}{2 \cdot M^2 \cdot D} = \\ &= h \cdot Q^2 \cdot \frac{(M^2 - D \cdot M)}{2 \cdot M^2 \cdot D} = h \cdot Q^2 \cdot \frac{(M-D)}{2M \cdot D} \\ Cu'(Q^o) &= \frac{-K \cdot D}{(Q^o)^2} + \frac{h \cdot (M-D)}{2 \cdot M} = 0 \quad (2.7.41) \end{aligned}$$

$$Q^o = \sqrt{\frac{2K \cdot D}{h \cdot \left(1 - \frac{D}{M}\right)}} \quad (2.7.42)$$

$$Cu(Q^o) = \frac{K \cdot D}{Q^o} + c \cdot D + \frac{h \cdot Q^o \cdot (M - D)}{2 \cdot M} = \quad (2.7.43)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{K \cdot D}{\sqrt{h \cdot \left(1 - \frac{D}{M}\right)}} + c \cdot D + \frac{h \cdot (M - D)}{2 \cdot M} \sqrt{\frac{2K \cdot D}{h \cdot \left(1 - \frac{D}{M}\right)}} = \\
 &= \sqrt{\frac{K^2 \cdot D^2 \cdot h \cdot \left(1 - \frac{D}{M}\right)}{2K \cdot D}} + c \cdot D \cdot \sqrt{\frac{h^2 \cdot (M - D)^2 \cdot 2K \cdot D}{4M^2 \cdot h \cdot (M - D)}} = \\
 &= \sqrt{\frac{h \cdot K \cdot D \cdot \left(1 - \frac{D}{M}\right)}{2}} + c \cdot D + \sqrt{\frac{h \cdot K \cdot D \cdot \left(1 - \frac{D}{M}\right)}{2}} = \\
 &= \sqrt{2h \cdot K \cdot D \cdot \left(1 - \frac{D}{M}\right)} + c \cdot D
 \end{aligned}$$

### *Osservazioni*

Ponendo a raffronto le formule risolutive del caso trattato al punto 2.7.1 - A con quelle del punto 2.7.3 si vede che quest'ultime coincidono con le prime solo quando  $M \rightarrow \infty$  cioè quando la produzione è istantanea. Se tale condizione non si verifica si ha:

$$Q^{\circ} > Q^* \quad \Rightarrow \quad Q^{\circ} = \sqrt{\frac{2K \cdot D}{h \cdot \left(1 - \frac{D}{M}\right)}} > Q^* = \sqrt{\frac{2K \cdot D}{h}}$$

$$n^{\circ} < n^* \quad \Rightarrow \quad n^{\circ} = \frac{D \cdot t}{Q^{\circ}} < n^* = \frac{D \cdot t}{Q^*}$$

$$T^{\circ} > T^* \quad \Rightarrow \quad T^{\circ} = \frac{Q^{\circ}}{D} > T^* = \frac{Q^*}{D}$$

$$Cu(Q^{\circ}) < Cu(Q^*) \Rightarrow \sqrt{2D \cdot K \cdot h \cdot \left(1 - \frac{D}{M}\right)} + c \cdot D < \sqrt{2D \cdot K \cdot h} + c \cdot D$$

Questa ultima condizione è logica in quanto nel caso di produzione graduale la giacenza media a magazzino è inferiore di quella con rifornimento istantaneo.

### *Esercizio*

Supponendo che il produttore di impianti ecologici nominato nell'esercizio del punto 2.7.1 - A decida di rifornire il suo magazzino con produzione continua nella misura di  $M = 450$  pezzi al giorno. Si determini  $Q^{\circ}$ ,  $n^{\circ}$ ,  $t^{\circ}$ ,  $Ct(Q^{\circ})$ .

### *Soluzione*

$$Q^{\circ} = \sqrt{\frac{2K \cdot D}{h \cdot \left(1 - \frac{D}{M}\right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 30.000.000 \cdot 333,34}{350 \cdot \left(1 - \frac{333,34}{450}\right)}} =$$

$$= 14.847 \text{ filtri} \quad ( > Q^* = 7.559)$$

$$n^\circ = \frac{120.000}{14.847} = 8 \text{ cicli} \quad (< n^* = 16,87)$$

$$T^\circ = \frac{360}{8} = 45 \text{ giorni} \quad (> t^* = 22,68)$$

$$Ct(Q^\circ) = \left[ \sqrt{2 \cdot 350 \cdot 30.000.000 \cdot 333,34 \cdot \left(1 - \frac{333,34}{450}\right)} + 100.000 \cdot 333,34 \right] \cdot 360 =$$

$$= 12.485 \text{ L. milioni} \quad [< F(Q^*) = 19.952]$$

Calcoli di questo tipo possono dare indicazioni sulla convenienza a produrre un articolo all'interno di un'azienda piuttosto che commissionare la produzione all'esterno, il che in genere implica la consegna in blocco delle quantità ordinate.

## 2.8 - MODELLI DETERMINISTICI DINAMICI.

### 2.8.1 - *Modelli per la programmazione della produzione*

Questi modelli si basano sul presupposto che il tasso di domanda dei prodotti e le quantità da produrre siano variabili da periodo a periodo pertanto le formule della radice quadrata del lotto economico non assicurano più una soluzione col costo minimo.

Nella letteratura corrente esistono però altri tipi di modelli che vengono applicati al campo della programmazione delle scorte nei processi di produzione. Tra quelli più ricorrenti si ricordano:

- *il modello studiato da Wagner e Whitin* che ipotizza i costi marginali di produzione e di giacenza costanti nel tempo (anno 1958);

- *il modello studiato da Eppen, Gould e Pashigian* che ipotizza i costi marginali di produzione e di giacenza come variabili lineari del tempo (anno 1969);
- *i modelli di Zangwill* che considerano anche il caso di rottura delle scorte e ipotizzano che i costi di produzione, di giacenza e di rottura dello stock siano variabili del tempo secondo funzioni concave o convesse (anno 1966);

Per semplicità nella presente trattazione considereremo solo il caso in cui non avvengano rotture delle scorte. Il problema in generale può essere presentato con le formulazioni matematiche di seguito indicate. Si supponga di dover programmare l'attività di produzione di una azienda in  $n$  periodi al fine di fare fronte ad una serie di richieste  $D_1, D_2, \dots, D_n$  di prodotti che devono essere soddisfatte nei periodi  $k = 1, 2, \dots, n$ . Con  $X_i$  si indichi il volume di produzione nel periodo  $i$ -esimo e con  $G(t)$  la funzione della giacenza rispetto al tempo  $t$  e con  $G_i$  il livello della giacenza alla fine del periodo  $i$ -esimo per  $i = 1, 2, \dots, n$ . Le giacenze soddisfano alla relazione:

$$G_i = G_{(i-1)} + X_i - D_i \quad \text{tenendo presente che} \quad \rightarrow \quad G_0 = 0 \quad (2.8.1)$$

Nel grafico di *figura 2.15* è riportato un esempio di andamento dei livelli delle giacenze in un programma produttivo su 6 periodi con attivazione della produzione all'inizio del 1° e 4° periodo. Emerge che la produzione realizzata all'inizio del 1° periodo deve soddisfare la domanda dei prodotti richiesti nel 1°, 2° e 3° periodo, mentre la produzione realizzata all'inizio del 4° periodo deve soddisfare la domanda dei prodotti richiesti nel 4°, 5° e 6° periodo. Le produzioni assumono pertanto i seguenti valori:

$$X_1 = D_1 + D_2 + D_3 > 0$$

$$X_4 = D_4 + D_5 + D_6 > 0$$

$$X_2 = X_3 = X_5 = X_6 = 0$$

mentre le giacenze, che decrescono per effetto della domanda, sono date da:

$$G_1 = X_1 - D_1 > 0$$

$$G_2 = G_1 - D_2 = X_1 - D_1 - D_2 > 0$$

$$G_3 = G_2 - D_3 = X_1 - D_1 - D_2 - D_3 = 0$$

$$G_4 = X_4 - D_4 > 0$$

$$G_5 = G_4 - D_5 = X_4 - D_4 - D_5 > 0$$

$$G_6 = G_5 - D_6 = X_4 - D_4 - D_5 - D_6 = 0$$

Siano dati i costi di attrezzaggio  $K_i$ , i costi unitari di produzione  $c_i$  e di giacenza  $h_i$  attribuiti arbitrariamente all'inizio dei periodi  $i = 1, 2, \dots, n$ . Ciò premesso, il problema consiste nel determinare l'ammontare delle produzioni  $X_1, X_2, \dots, X_n$  che minimizzano il costo totale di gestione.

Se  $a(i, k)$  è il costo marginale di produzione e di giacenza di una unità prodotta nel periodo  $i$  e venduta nel periodo  $k$  per  $i \leq k$  dato da:

$$a(i, k) = c(i) + h(i) + h(i+1) + \dots + h(k) \quad (2.8.2)$$

Ne consegue che il corrispondente costo totale di gestione è dato dalla formula che segue:

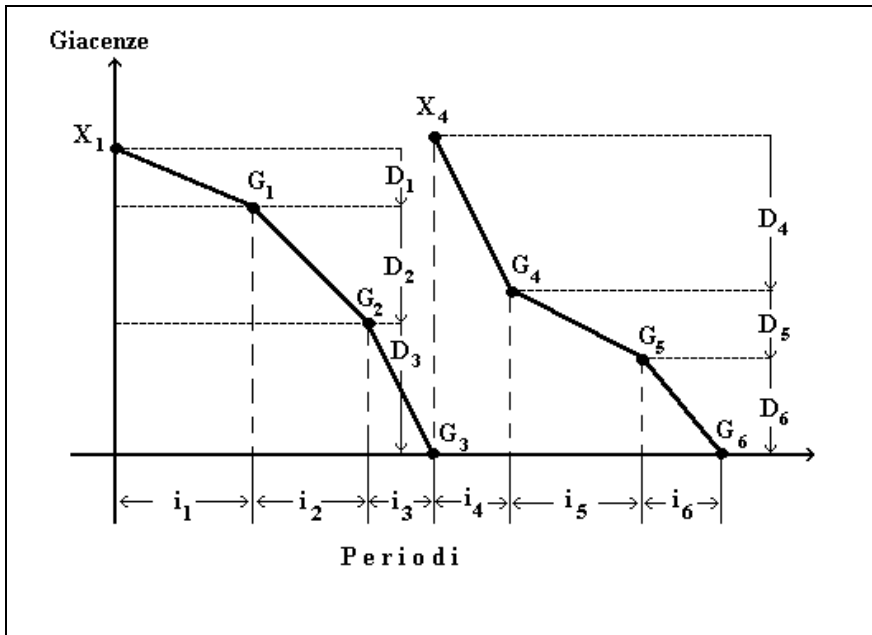
$$C(i, k) = C(i-1) + K(i) + \sum_{j=i}^k a(i, j) \cdot D(j) \quad \Rightarrow \quad \text{per } (i \leq k) \quad (2.8.3)$$

dove  $C_0 = 0$

Si indichi con  $C_t(k)$  il costo minimo totale di gestione a cui corrisponde il programma di produzione ottimale. Questo deve essere ricercato esaminando tutte le possibili soluzioni di programmazione realizzabili potenzialmente negli  $n$  periodi e selezionando in ciascuno di questi le soluzioni che danno il costo minimo  $C(i,k)$ :

$$C_t(k) = \underset{i=1, 2, 3, \dots, n}{\text{Minimo}} C(i,k) \quad (2.8.4)$$

*Figura n. 2.15  
Andamento dinamico delle giacenze.*

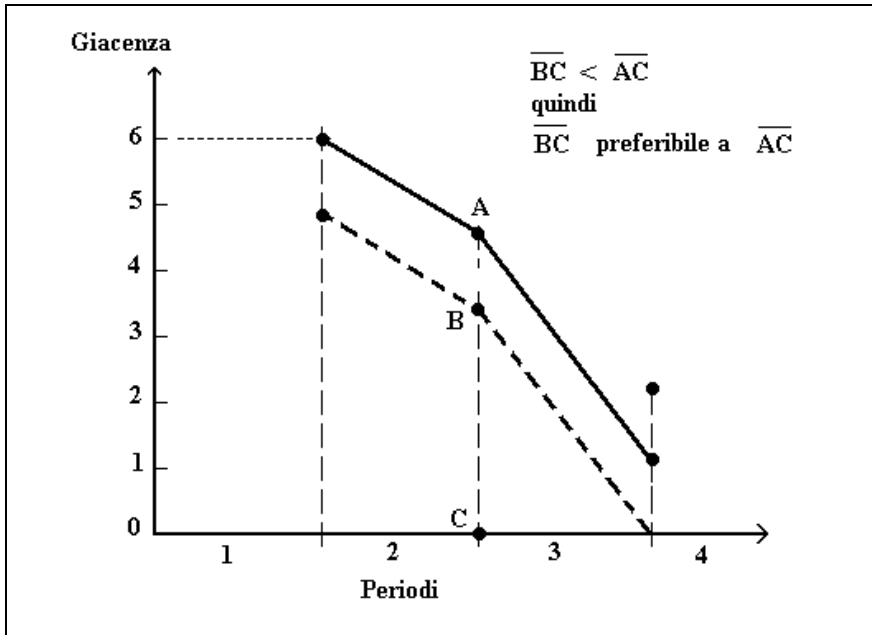


Nei problemi di programmazione dinamica della produzione è importante tenere sempre presente la seguente regola generale che caratterizza le politiche ottimali di gestione:

***“Al fine di minimizzare i costi di gestione delle scorte nei casi in cui si ha una domanda dei prodotti arbitraria e variabile nei vari periodi di produzione, con un costo fisso di attrezzaggio e costi di produzione e di giacenza variabili linearmente, si deve sempre emettere un ordine di produzione solo quando il livello delle giacenze è nullo”.***

Questa proprietà è dimostrata intuitivamente nel grafico riportato in *figura 2.16*. La curva non tratteggiata evidenzia il caso in cui all'inizio del 2° periodo vengono prodotte 6 unità e all'inizio del 4° viene prodotta 1° unità anche se la scorta di magazzino non è nulla. La curva tratteggiata evidenzia invece il caso in cui all'inizio del 2° periodo si producono 5 unità e all'inizio del 4° periodo vengono prodotte 2 unità dopo che la scorta si è annullata. Si può notare che la seconda soluzione (che è quella che prevede il reintegro del magazzino nel momento in cui la giacenza è nulla) è preferibile alla prima in quanto tutti i punti su di questa hanno ordinate inferiori (vedi punto B preferibile al punto A) e quindi comportano costi di giacenza più contenuti.

Figura n. 2.16  
*Scelte nella programmazione delle giacenze.*



**Esercizio**

Un'azienda deve soddisfare le seguenti richieste di prodotti nell'arco di 4 periodi

$$D_1 = 3, D_2 = 2, D_3 = 3, D_4 = 2.$$

Il costo di preparazione dei lotti è di 2, il costo di produzione per articolo è di 1 e il costo di giacenza è di 20 centesimi per articolo.

Si deve determinare quanto l'azienda deve produrre ogni periodo per soddisfare le richieste della clientela e nello stesso tempo minimizzare il costo totale di gestione nell'ipotesi che i suddetti costi siano costanti nei quattro periodi.

*Soluzione*

$$\left. \begin{array}{l} K = 2 \\ c = 1 \\ h = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} \\ D_1 = 3 \\ D_2 = 2 \\ D_3 = 3 \\ D_4 = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Costanti per tutti i 4 periodi.} \\ \\ \\ \text{Domanda totale} = 10 \end{array}$$

$$C(k) = \underset{i=1,2,3,4}{\text{Minimo}} \left[ C(i-1) + K(i) + \sum_{j=i}^k a(i,j)D(j) \right]$$

Per  $K$ ,  $c$ ,  $h$  costanti la  $C(k)$  si trasforma in:

$$C(k) = \underset{i=1,2,3,4}{\text{Minimo}} \{ C \cdot (i-1) + K + c \cdot [D_i + \dots + D_4] + h \cdot [D_i + 2D_{i+1} + 3D_{i+2} + D_4] \}$$

dove per  $i=1$  si avrà  $C_0 = 0$ .

Passiamo ora in rassegna tutti i possibili programmi attuabili nei quattro periodi interessati all'attività di produzione.

*1° Periodo:*

Si consideri solo il caso di ordinazione per il 1° periodo (figura 2.17):

$$C_{1,1} = C_0 + 2 + 1 \cdot 3 + \frac{1}{5} \cdot 3 = 0 + 2 + 3 + 0,6 = 5,6 \Rightarrow C_{1,1}$$

*2° Periodo:*

Si possono ipotizzare due possibili soluzioni:

- *effettuare l'ultimo ordine all'inizio del 1° periodo (figura 2.18),*
- *effettuare l'ultimo ordine all'inizio del 2° periodo (figura 2.19),*

ed alle quali corrispondono i seguenti costi di gestione:

$$C_{1,2} = C_0 + 2 + 1 \cdot (3 + 2) + \frac{1}{5} \cdot (3 + 2 \cdot 2) = 0 + 2 + 5 + 1,4 = 8,4$$

$$C_{2,2} = C_1 + 2 + 1 \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 2 = 5,6 + 2 + 2 + 0,4 = 10$$

dei quali il minimo è:

$$C_2 = \text{Minimo}[\text{tra } C_{1,2} = 8,4; C_{2,2} = 10] = 8,4$$

*3° Periodo:*

Si possono ipotizzare le seguenti tre soluzioni:

- *effettuare l'ultimo ordine all'inizio del 1° periodo (figura 2.20);*
- *effettuare l'ultimo ordine all'inizio del 2° periodo (figura 2.21);*

– *effettuare l'ultimo ordine all'inizio del 3° periodo (figura 2.22);*

alle quali corrispondono i seguenti costi di gestione:

$$C_{1,3} = C_0 + 2 + 1 \cdot (3 + 2 + 3) + \frac{1}{5} \cdot (3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3) = 0 + 2 + 8 + 3,2 = 13,2$$

$$C_{2,3} = C_1 + 2 + 1 \cdot (2 + 3) + \frac{1}{5} \cdot (2 + 2 \cdot 3) = 5,6 + 2 + 5 + 1,6 = 14,2$$

$$C_{3,3} = C_2 + 2 + 1 \cdot 3 + \frac{1}{5} \cdot 3 = 8,4 + 2 + 3 + 0,6 = 14$$

dei quali il minimo è:

$$C_3 = \text{Minimo}[\text{tra } C_{1,3} = 13,2; C_{2,3} = 14,2; C_{3,3} = 14] = 13,2$$

*4° Periodo:*

Quale ultimo caso possono essere considerate le seguenti quattro ipotesi:

– *effettuare l'ultimo ordine all'inizio del 1° periodo (figura 2.23);*

– *effettuare l'ultimo ordine all'inizio del 2° periodo (figura 2.24);*

– *effettuare l'ultimo ordine all'inizio del 3° periodo (figura 2.25);*

– *effettuare l'ultimo ordine all'inizio del 4° periodo (figura 2.26);*

alle quali corrispondono i seguenti costi di gestione:

$$C_{1,4} = C_0 + 2 + 1 \cdot (3 + 2 + 3 + 2) + \frac{1}{5} \cdot (3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2) = 0 + 2 + 10 + 4,8 = 16,8$$

$$C_{2,4} = C_1 + 2 + 1 \cdot (2 + 3 + 2) + \frac{1}{5} \cdot (2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2) = 5,6 + 2 + 7 + 2,8 = 17,4$$

$$C_{3,4} = C_2 + 2 + 1 \cdot (3 + 2) + \frac{1}{5} \cdot (3 + 2 \cdot 2) = 8,4 + 2 + 5 + 1,4 = 16,8$$

$$C_{4,4} = C_3 + 2 + 1 \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 2 = 13,2 + 2 + 2 + 0,4 = 17,6$$

dei quali il minimo è:

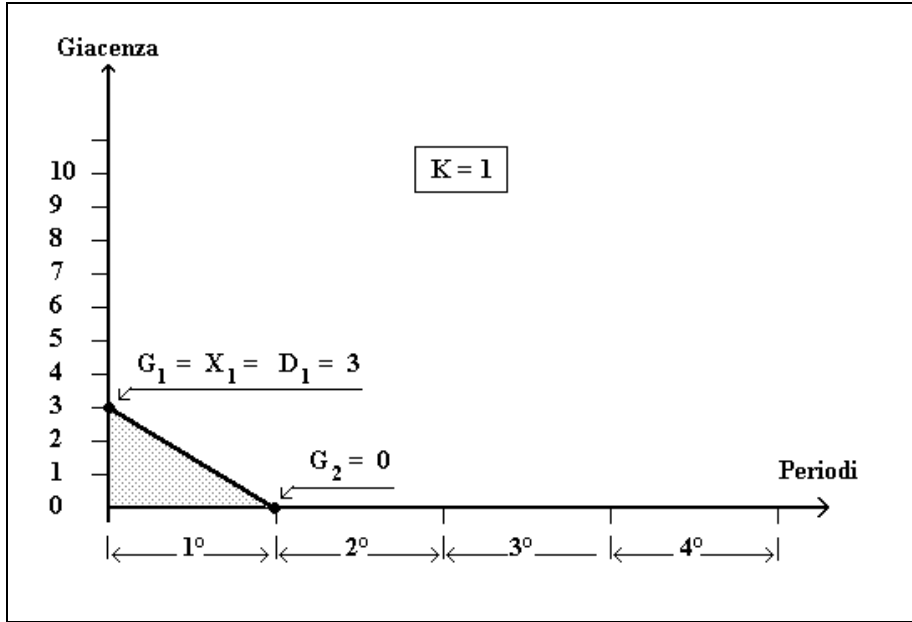
$$C_4 = \text{Minimo [tra } C_{1,4} = 16,8; C_{2,4} = 17,4; C_{3,4} = 16,8; C_{4,4} = 17,6]} = 16,8$$

Per avere il costo minimo di gestione di 16,8 devono essere pertanto attuati in alternativa uno dei due sotto riportati programmi di produzione.

<b>PRODUZIONE PER PERIODO</b>				
	<b>X<sub>1</sub></b>	<b>X<sub>2</sub></b>	<b>X<sub>3</sub></b>	<b>X<sub>4</sub></b>
<b>1° Soluzione</b>	10	0	0	0
<b>2° Soluzione</b>	5	0	5	0

Dai risultati ottenuti si può constatare che il costo unitario  $c$  è irrilevante ai fini della risoluzione del problema perché tutte le politiche possibili prevedono la produzione del medesimo numero di articoli che comportano pertanto lo stesso costo totale. Questo può essere trascurato ottenendo sempre la stessa soluzione ottimale.

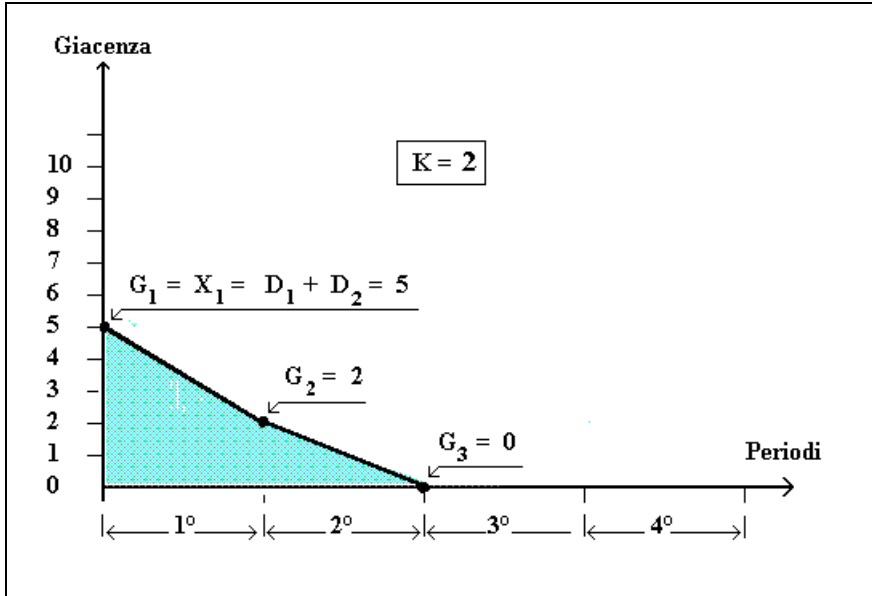
Figura n. 2.17  
 Ultimo approvvigionamento: inizio 1° periodo



PROGRAMMA		PERIODI (i)			
		1°	2°	3°	4°
PRODUZIONE	$X_i$	3			
DOMANDA	$D_i$	3			
Giacenza	INIZIALE ( $G_i$ )	3			
Giacenza	FINALE [ $G_{(i+1)}$ ]	0			

Costo di gestione  $\Rightarrow C_{(1,1)} = 5,6 \rightarrow = C_1$

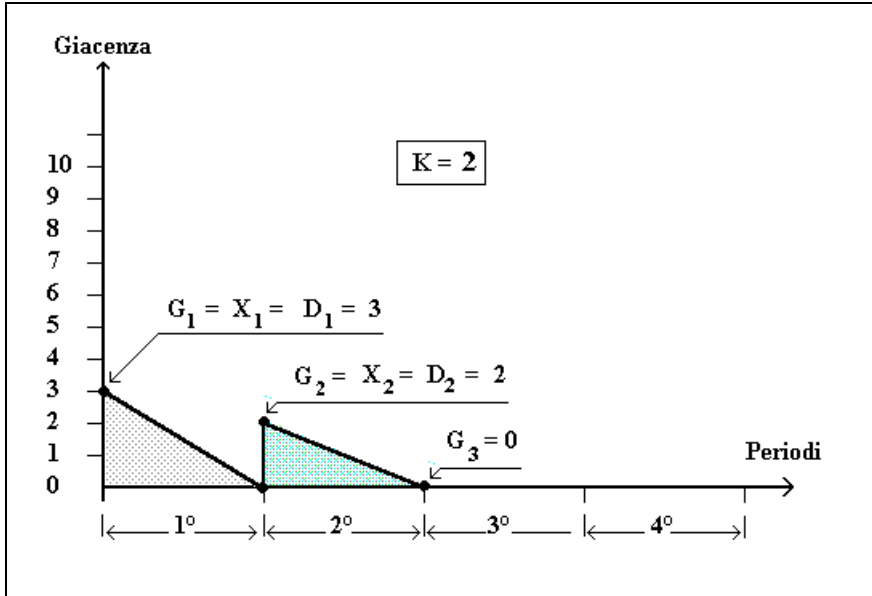
Figura n. 2.18 -  
 Ultimo approvvigionamento: inizio 1° periodo



PROGRAMMA		PERIODI (i)			
		1°	2°	3°	4°
PRODUZIONE	$X_i$	5	0		
DOMANDA	$D_i$	3	2		
Giacenza	INIZIALE ( $G_i$ )	5	2		
Giacenza	FINALE [ $G_{(i+1)}$ ]	2	0		

Costo di gestione  $\Rightarrow C_{(1,2)} = 8,4 \rightarrow = C_2$

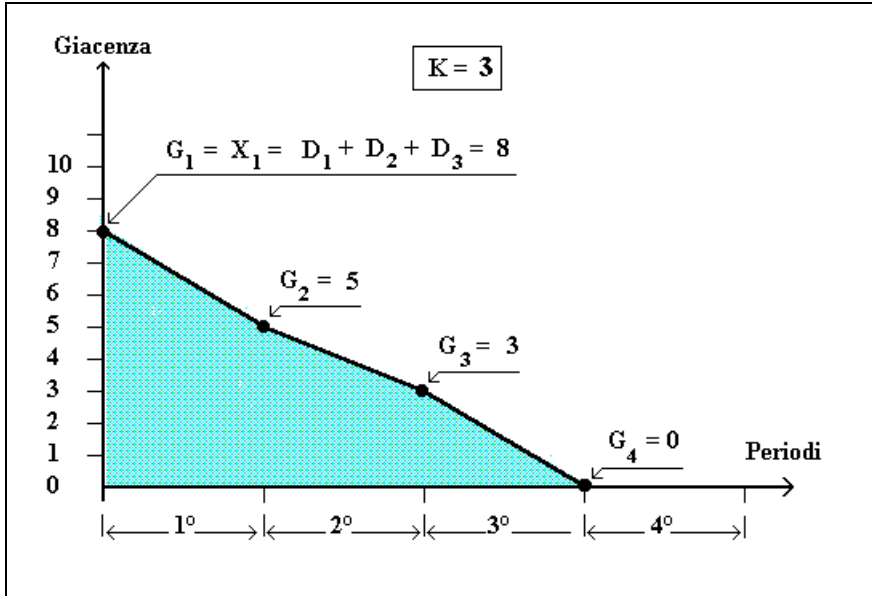
Figura n. 2.19 -  
 Ultimo approvvigionamento: inizio 2° periodo



PROGRAMMA		PERIODI (i)			
		1°	2°	3°	4°
PRODUZIONE	$X_i$	3	2		
DOMANDA	$D_i$	3	2		
Giacenza	INIZIALE ( $G_i$ )	3	2		
Giacenza	FINALE [ $G_{(i+1)}$ ]	0	2		

Costo di gestione  $\Rightarrow C_{(2,2)} = 10$

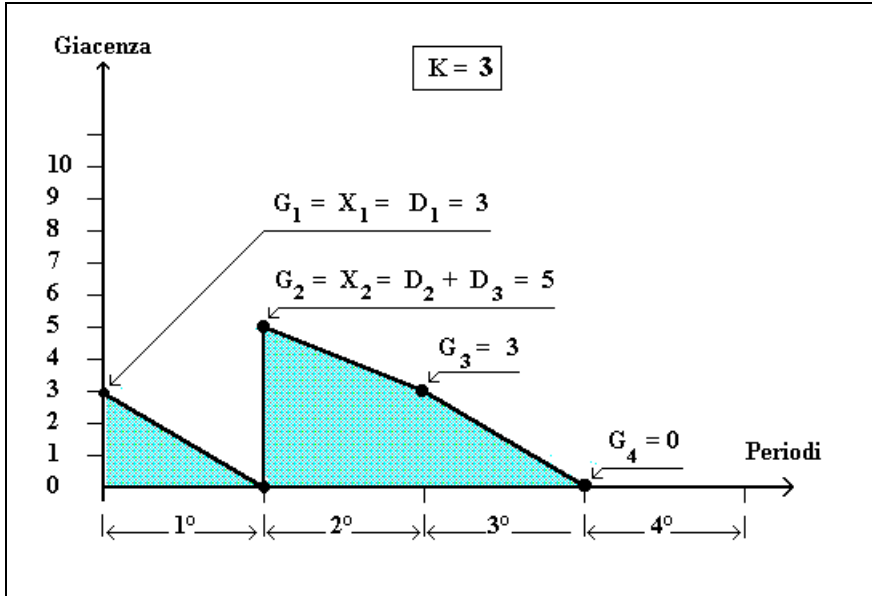
Figura n. 2.20  
 Ultimo approvvigionamento: inizio 1° periodo



PROGRAMMA		PERIODI (i)			
		1°	2°	3°	4°
PRODUZIONE	$X_i$	8	0	0	
DOMANDA	$D_i$	3	2	3	
Giacenza	INIZIALE ( $G_i$ )	8	5	3	
Giacenza	FINALE [ $G_{(i+1)}$ ]	5	3	0	

Costo di gestione  $\Rightarrow C_{(1,3)} = 13,2 \rightarrow = C_3$

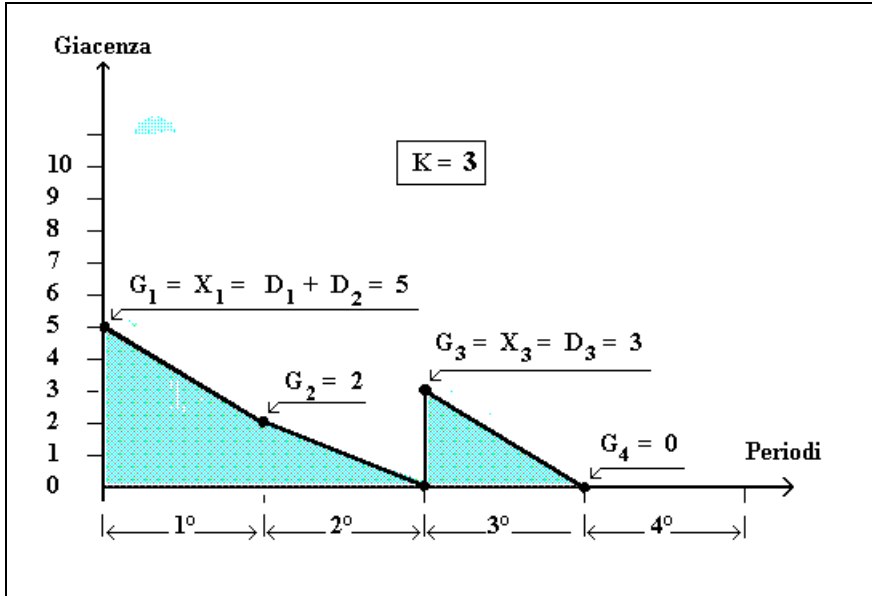
Figura n. 2.21  
 Ultimo approvvigionamento: inizio 2° periodo



PROGRAMMA		PERIODI (i)			
		1°	2°	3°	4°
PRODUZIONE	$X_i$	3	5	0	
DOMANDA	$D_i$	3	2	3	
Giacenza	INIZIALE ( $G_i$ )	3	5	3	
Giacenza	FINALE [ $G_{(i+1)}$ ]	0	3	0	

Costo di gestione  $\Rightarrow C_{(2,3)} = 14,2$

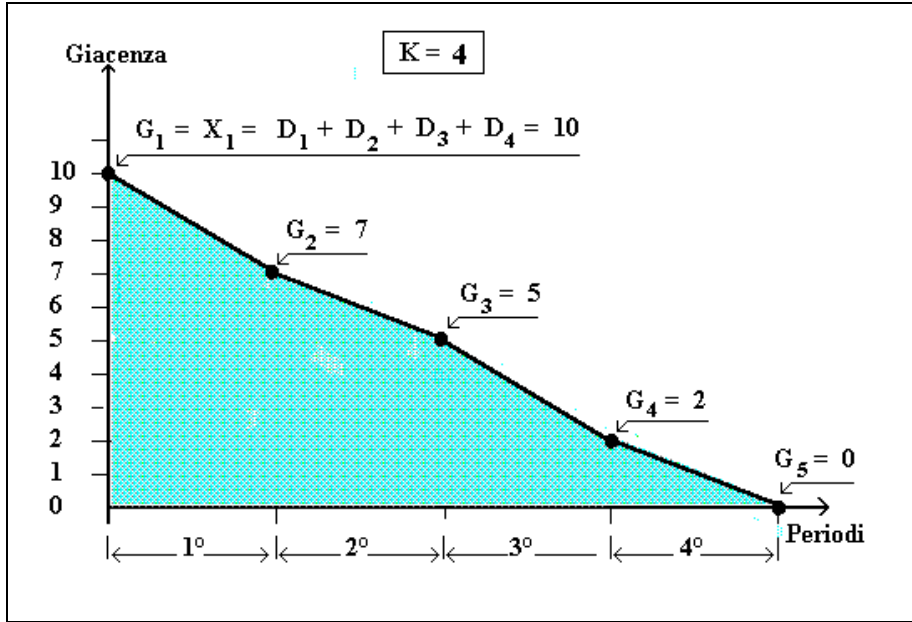
Figura n. 2.22  
 Ultimo approvvigionamento: inizio 3° periodo



PROGRAMMA		PERIODI (i)			
		1°	2°	3°	4°
PRODUZIONE	$X_i$	5	0	3	
DOMANDA	$D_i$	3	2	3	
Giacenza	INIZIALE ( $G_i$ )	5	2	3	
Giacenza	FINALE [ $G_{(i+1)}$ ]	2	0	0	

Costo di gestione  $\Rightarrow C_{(3,3)} = 14$

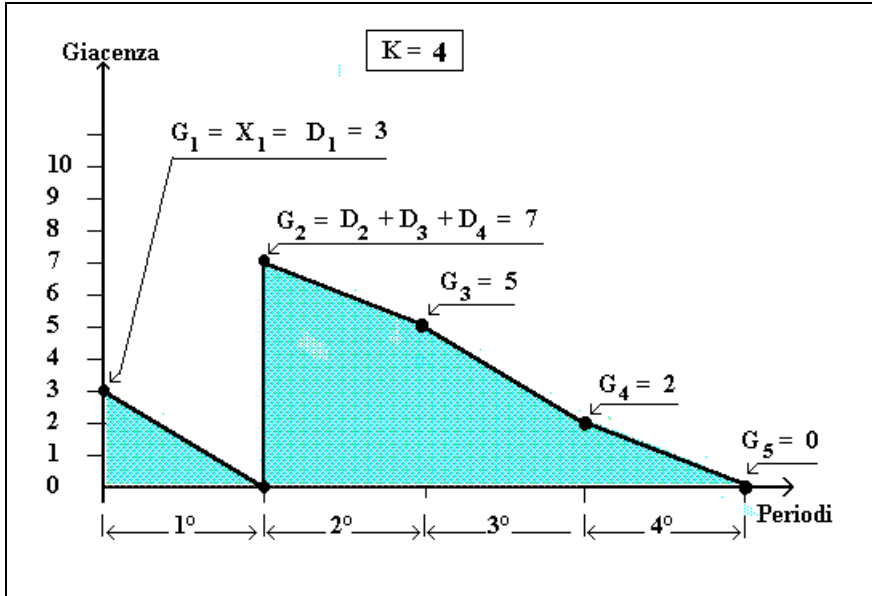
Figura n. 2.23  
 Ultimo approvvigionamento: inizio 1° periodo



PROGRAMMA		PERIODI (i)			
		1°	2°	3°	4°
PRODUZIONE	$X_i$	10	0	0	0
DOMANDA	$D_i$	3	2	3	2
Giacenza	INIZIALE ( $G_i$ )	10	7	5	2
Giacenza	FINALE [ $G_{(i+1)}$ ]	7	5	2	0

Costo di gestione  $\Rightarrow C_{(1,4)} = 16,8 = C_4$

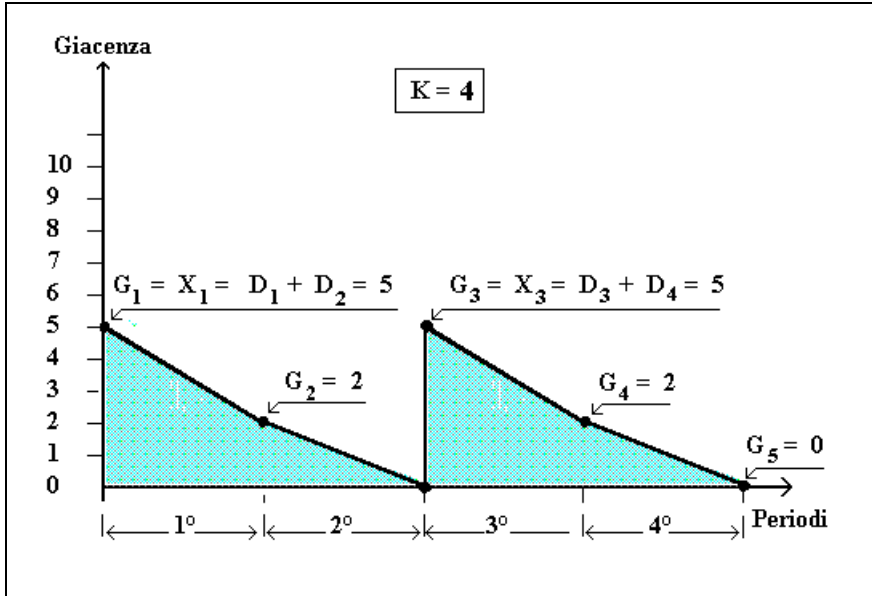
Figura n. 2.24  
 Ultimo approvvigionamento: inizio 2° periodo



PROGRAMMA		PERIODI (i)			
		1°	2°	3°	4°
PRODUZIONE	$X_i$	3	7	0	0
DOMANDA	$D_i$	3	2	3	2
Giacenza	INIZIALE ( $G_i$ )	3	7	5	2
Giacenza	FINALE [ $G_{(i+1)}$ ]	0	5	2	0

Costo di gestione  $\Rightarrow C_{(2,4)} = 17,4$

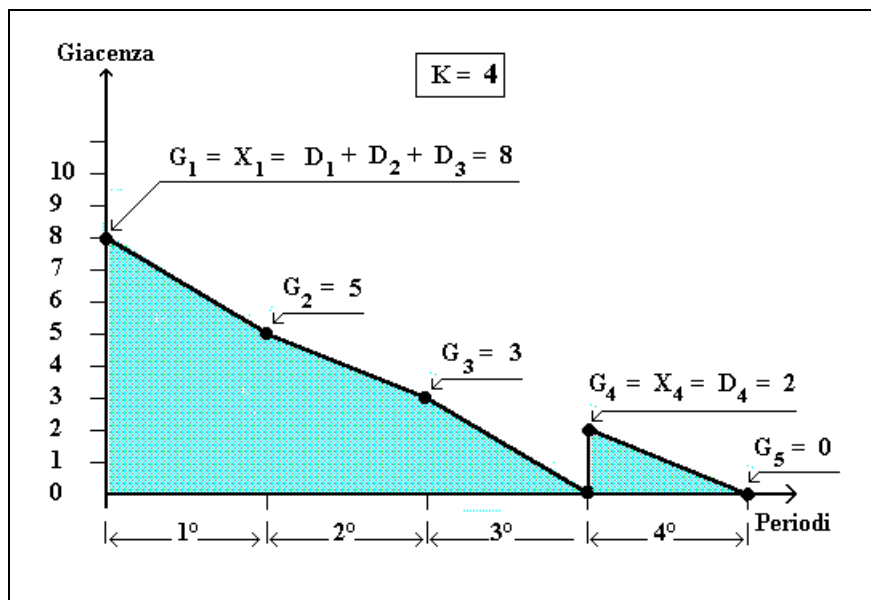
Figura n. 2.25  
 Ultimo approvvigionamento: inizio 3° periodo



PROGRAMMA		PERIODI (i)			
		1°	2°	3°	4°
PRODUZIONE	$X_i$	5	0	5	0
DOMANDA	$D_i$	3	2	3	2
Giacenza	INIZIALE ( $G_i$ )	5	2	5	2
Giacenza	FINALE [ $G_{(i+1)}$ ]	2	0	2	0

Costo di gestione  $\Rightarrow C_{(3,4)} = 16,8 = C_{1,4} = C_4$

Figura n. 2.26  
 Ultimo approvvigionamento: inizio 4° periodo



PROGRAMMA		PERIODI (i)			
		1°	2°	3°	4°
PRODUZIONE	$X_i$	8	0	0	2
DOMANDA	$D_i$	3	2	3	2
Giacenza	INIZIALE ( $G_i$ )	8	5	3	2
Giacenza	FINALE [ $G_{(i+1)}$ ]	5	3	0	0

Costo di gestione  $\Rightarrow C_{(4,4)} = 17,6$

**2.8.2 - Modelli per l'uscita delle scorte dei prodotti deteriorabili nel tempo.**

Esistono diverse attività industriali e commerciali in cui il valore delle merci che vengono prodotte o commercializzate dipende dalla loro età. Tipico è il caso degli articoli che una volta prodotti e posti in magazzino subiscono deterioramento nel tempo come ad esempio i

generi alimentari destinati ai grandi supermercati o ai negozi di vendita al dettaglio.

In questi casi si pongono tre particolari problemi per la gestione delle scorte:

- 1) *necessità di attivare un sistema informativo logistico che fornisca sistematicamente nel tempo, per ogni articolo o gruppo di articoli, la data di produzione e la durata di permanenza in magazzino;*
- 2) *studiare un algoritmo matematico che consenta di calcolare in ogni istante la vita utile degli articoli o gruppi di articoli in funzione della loro età;*
- 3) *definire il criterio più adatto per decidere l'ordine di uscita degli articoli dal magazzino in modo tale da rendere massima la vita utile complessiva delle scorte.*

Contrariamente a quanto si è visto nei casi del lotto economico, per la gestione delle scorte dei prodotti deteriorabili non è possibile definire modelli matematici standardizzati da applicare per le diverse realtà aziendali.

Per ogni caso deve essere studiato il modello specifico che tenga conto dei peculiari aspetti gestionali che di volta in volta si presentano.

Se si considera una gestione con  $n$  articoli ove all' $i$ -esimo articolo può essere abbinata la rispettiva età  $S_i$  (durata del periodo trascorso in magazzino) con  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ;

dicesi “*vita utile del generico articolo  $i$  la funzione  $L(S_i)$  di età  $S_i$  a partire dal momento della sua produzione*”.

Quando l'utilità di un prodotto o la sua esistenza nel magazzino è finita, allora detto articolo è sostituito con un altro appartenente alla scorta.

L'ordine di uscita degli articoli deve essere tale da rendere massima la vita utile complessiva ottenibile delle scorte.

La politica ottimale di uscita delle scorte scaturisce sostanzialmente dall'analisi che deriva dalla:

- conoscenza dettagliata per ogni articolo in stock del valore di  $L(S)$  in funzione dell'età  $S$ ;
- possibilità di stabilire la politica ottimale di uscita dal magazzino di ogni singolo articolo rispetto agli altri.

Nei casi pratici la funzione  $L(S)$  può essere lineare, concava o convessa con andamento decrescente con l'aumentare di  $S$ .

La scelta della politica ottimale di uscita degli stock è strettamente correlata al valore e segno della sua derivata prima rispetto a  $S$ , cioè:

$$\frac{\partial L(S)}{\partial S} \Rightarrow \begin{cases} > -1 \\ = -1 \\ < -1 \end{cases} \quad (2.8.5)$$

I criteri comunemente conosciuti per l'uscita degli stocks sono due:

- **Criterio LIFO (Last In-First Out)** - esce per primo dal magazzino l'articolo che è entrato nello stock per ultimo;
- **Criterio FIFO (First In-First Out)** - esce per primo dal magazzino l'articolo che è entrato nello stock per primo.

Nel caso particolare che si considerino due articoli di età  $S_1$  e  $S_2$  in cui  $S_2 > S_1$  si possono avere due possibili alternative di uscita dal magazzino:

- 1°) -  $S_1$  seguita da  $S_2 \Rightarrow \Rightarrow$  Criterio LIFO
- 2°) -  $S_2$  seguita da  $S_1 \Rightarrow \Rightarrow$  Criterio FIFO

Nel caso di criterio **LIFO** la vita utile totale è data da:

$$L(S_1) + L[S_2 + L(S_1)] \quad (2.8.6)$$

mentre nel caso di Criterio FIFO è data da:

$$L(S_2) + L[S_1 + L(S_2)] \quad (2.8.7)$$

In base al tipo della funzione  $L(S)$  adottata si può decidere di seguire il criterio **LIFO** o **FIFO** a seconda che venga verificata una delle seguenti situazioni di ottimalità:

$$1^\circ) \quad \begin{array}{ccc} L(S_1) + L[S_2 + L(S_1)] > L(S_2) + L[S_1 + L(S_2)] \\ | \text{-----} | & & | \text{-----} | \\ \uparrow & & \uparrow \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Vita utile totale con LIFO} & & \text{Vita utile totale con FIFO} \end{array}$$

$$2^\circ) \quad \begin{array}{ccc} L(S_2) + L[S_1 + L(S_2)] \geq L(S_1) + L[S_2 + L(S_1)] \\ | \text{-----} | & & | \text{-----} | \\ \uparrow & & \uparrow \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Vita utile totale con FIFO} & & \text{Vita utile totale con LIFO} \end{array}$$

E' stato dimostrato che il criterio FIFO è sempre ottimale per ( $n \geq 2$ ) quando la funzione della vita utile  $L(S)$  è:

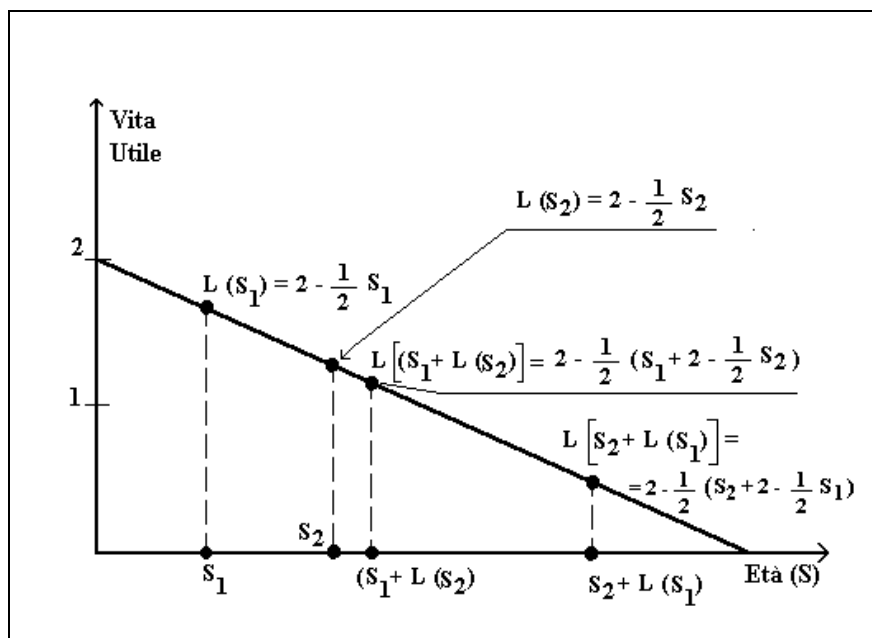
- **lineare** con andamento decrescente del tipo  $L(S) = a + b S$  purché il coefficiente angolare sia  $b \geq -1$ ;
- **concava** con andamento decrescente purché  $\frac{\partial L(S)}{\partial S} \geq -1$ .

Il Criterio LIFO è sempre ottimale per ( $n \geq 2$ ) quando la funzione della vita utile  $L(S)$  è convessa con andamento decrescente purché  $\frac{\partial L(S)}{\partial S} \geq -1$ .

**Esempio**

Nella figura 2.27 viene riportata la funzione della vita utile delle scorte di due articoli con età  $S_1$  e  $S_2$  mesi nell'ipotesi di  $S_2 > S_1$  e  $b > -1$ .

Figura n. 2.27<sup>(\*)</sup>  
**Funzione della vita utile delle scorte.**



(\*) Esempio ripreso da F. S. Hillire e G. J. Lieberman - INTRODUZIONE ALLA RICERCA OPERATIVA - Franco Angeli Editore - Cap. 12, pag. 423/426 - anno 1973

Detta funzione è:

$$L(S) = 2 - \frac{1}{2} \cdot S \quad (2.8.8)$$

E' facilmente verificabile che  $L(S)$  soddisfa la 2° relazione vista sopra e ciò dimostra che il criterio FIFO è quello ottimale per la gestione del magazzino:

$$L(S_2) + L[S_1 + L(S_2)] \geq L(S_1) + L[S_2 + L(S_1)]$$

$$\left(2 - \frac{1}{2} \cdot S_2\right) + \left\{2 - \frac{1}{2} \cdot \left[S_1 + \left(2 - \frac{1}{2} \cdot S_2\right)\right]\right\} > \left(2 - \frac{1}{2} \cdot S_1\right) + \left\{2 - \frac{1}{2} \cdot \left[S_2 + \left(2 - \frac{1}{2} \cdot S_1\right)\right]\right\}$$

$$\left(2 - \frac{1}{2} \cdot S_2 + 2 - \frac{1}{2} \cdot S_1 - 1 + \frac{1}{4} \cdot S_2\right) > \left(2 - \frac{1}{2} \cdot S_1 + 2 - \frac{1}{2} \cdot S_2 - 1 + \frac{1}{4} \cdot S_1\right)$$

$$\left(3 - \frac{1}{2} \cdot S_1 - \frac{1}{4} \cdot S_2\right) > \left(3 - \frac{1}{2} \cdot S_2 - \frac{1}{4} \cdot S_1\right)$$

Si supponga che i due articoli abbiano età:

$$\begin{cases} S_1 = \mathbf{2 \text{ mesi}} \\ S_2 = \mathbf{3 \text{ mesi}} \end{cases}$$

La vita utile totale a magazzino sarebbe di 1 mese e 1 settimana nel caso in cui si decidesse di usare il criterio FIFO e di solo 1 mese se si

adottasse il criterio LIFO. Infatti sostituendo  $S_1 = 2$  e  $S_2 = 3$  nella relazione sopra esposta si ottiene:

$$\left(3 - \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot 3\right) > \left(3 - \frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{1}{4} \cdot 2\right)$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 4 & 2 & 4 & 4 & 3 & & 1 & 4 & 4 & 2 & 4 & 4 & 3 \\ & & & \uparrow & & & & & & & & \uparrow & & & \\ & & & \mathbf{1,25} & & & & & & & & \mathbf{1} & & & \\ & & & \uparrow & & & & & & & & \uparrow & & & \end{array}$$

Vita utile totale con FIFO

Vita utile totale con LIFO

## 2.9 - MODELLI PROBABILISTICI STATICI.

In generale i modelli probabilistici (o stocastici) sono caratterizzati dal fatto che la domanda degli articoli tenuti a scorta non è nota a priori ma può essere identificata come una variabile casuale con distribuzione di probabilità conosciuta. Le funzioni di probabilità a cui si fa maggiore ricorso sono la:

– ***Distribuzione normale (gaussiana):***

che, per il teorema centrale del calcolo delle probabilità, descrive molto bene fenomeni risultanti dalla somma di effetti quasi del tutto indipendenti l'uno dall'altro quali le vendite dei prodotti di largo consumo;

– ***Distribuzione poissoniana:***

che è adatta per descrivere le manifestazioni degli eventi rari quali i movimenti dei prodotti molto costosi e non molto richiesti;

– ***Distribuzione di Erlang:***

solitamente vengono usate le funzioni esponenziali negative per gestire le scorte di particolari prodotti nel campo della

manutenzione e riparazione di automezzi, macchinari e impianti (ad esempio per descrivere la domanda delle parti di ricambio soggette a guasti).

Nei modelli probabilistici statici (definiti per pianificare la produzione o l'acquisto degli articoli che sono utilizzati o venduti in un solo periodo) si fa uso della seguente simbologia:

- x***      *giacenze iniziale;*
- y***      *livello della giacenza dopo il ricevimento della quantità ordinata (giacenza iniziale più quantità ordinata);*
- Q***      *quantità ordinata [ $Q = y - x$ ];*
- z***      *quantità richiesta nel periodo (**domanda**);*
- f(z)***    *funzione di densità della quantità richiesta (supposta continua);*
- G(t)***    *livello della giacenza al tempo "**t**";*
- H(y-z)*** *costo di giacenza considerato come funzione della quantità residua ( $y - z$ ) alla fine del periodo. Quando si ha  $y < z$  il costo di giacenza è nullo [ $H(y - z) = 0$ ];*
- P(z-y)*** *penalità per la rottura dello stock considerata come funzione della quantità sotto scorta [ $z - y$ ] alla fine del periodo. Quando si ha  $z < y$  il costo di rottura dello stock è nullo [ $P(z - y) = 0$ ];*
- V(y-z)*** *valore di recupero degli articoli invenduti considerato come funzione della quantità residua ( $y - z$ ) alla fine del periodo. Nel caso in cui  $y < z$  si ha [ $V(y - z) = 0$ ];*
- r***      *ricavo unitario di vendita degli articoli.*

Si suppone che il costo di ordinazione sia dato da:

$$C(y, x) = K + c \cdot (y - x) \quad (2.9.1)$$

(ove  $K$  è il costo fisso di attivazione del lotto e  $c$  è il costo marginale unitario del prodotto ordinato) e che le funzioni  $H(y-z)$ ,  $P(z-y)$  e  $V(y-z)$  siano continue con derivate seconde continue.

Nei grafici riportati nelle *figure 2.28 e 2.29* sono rappresentati gli andamenti delle giacenze rispettivamente nel caso di giacenza finale positiva e nel caso di rottura dello stock.

Sia  $L(x, y, z)$  la funzione opposta del profitto data dalla differenza tra il costo totale di gestione dello stock (costo di ordinazione + costo di giacenza + eventuale costo di rottura dello stock) ed il ricavo derivante dalla vendita delle " $z$ " unità e dell'eventuale valore di recupero degli " $(y-z)$ " articoli invenduti:

$$L(x, y, z) = \underbrace{[K + c \cdot (y - x) + H(y - z) + P(z - y)]}_{\substack{\uparrow \\ \text{costo di} \\ \text{gestione dello} \\ \text{stock}}} - \underbrace{[V(y - z) + r \cdot (\text{Min. } z, y)]}_{\substack{\uparrow \\ \text{ricavi di} \\ \text{vendita dello} \\ \text{stock}}} \quad (2.9.2)$$

Il valore atteso della funzione  $L(x, y, z)$  è dato da:

$$E[L(x, y, z)] = \int_0^{\infty} L(x, y, z) \cdot f(z) \cdot dz = g(y) + K - c \cdot x \quad (2.9.3)$$

ove la funzione  $g(y)$  è data da:

$$g(y) = c \cdot y + \int_0^y [H(y-z) - V(y-z) - r \cdot z] \cdot f(z) \cdot dz + \int_y^{\infty} [P(z-y) - r \cdot y] \cdot f(z) \cdot dz \quad (2.9.4)$$

Tenendo presente che la derivata di un generico integrale  $\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) \cdot dx$  rispetto a  $y$  è data da:

$$\frac{dI}{dy} = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot dx + \left[ f(b, y) \cdot \frac{db}{dy} - f(a, y) \cdot \frac{da}{dy} \right] \quad (2.9.5)$$

Si ottiene la funzione della derivata prima di  $g(y)$ :

$$g'(y) = c + \int_0^Y [H'(y-z) - V'(y-z)] \cdot f(z) \cdot dz + \int_Y^{+\infty} [P'(z-y) - r] \cdot f(z) \cdot dz \quad (2.9.6)$$

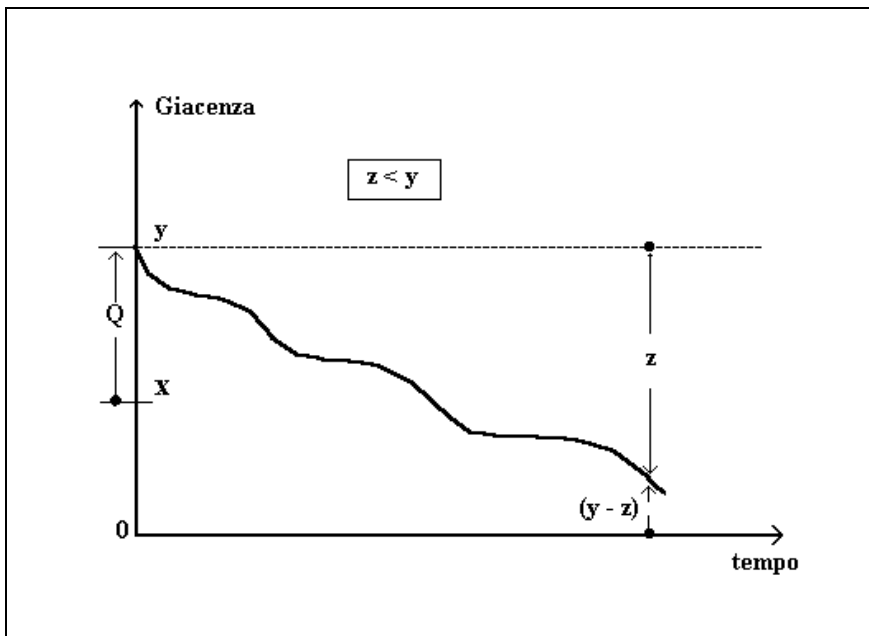
La politica ottimale di ordinazione è quella che si ottiene massimizzando il profitto atteso. Il che equivale a trovare una quantità da ordinare  $[(y - x) > 0]$  tale da rendere minima la funzione  $g(y)$ .

Per l'analisi del modello vengono fatte le seguenti due ipotesi:

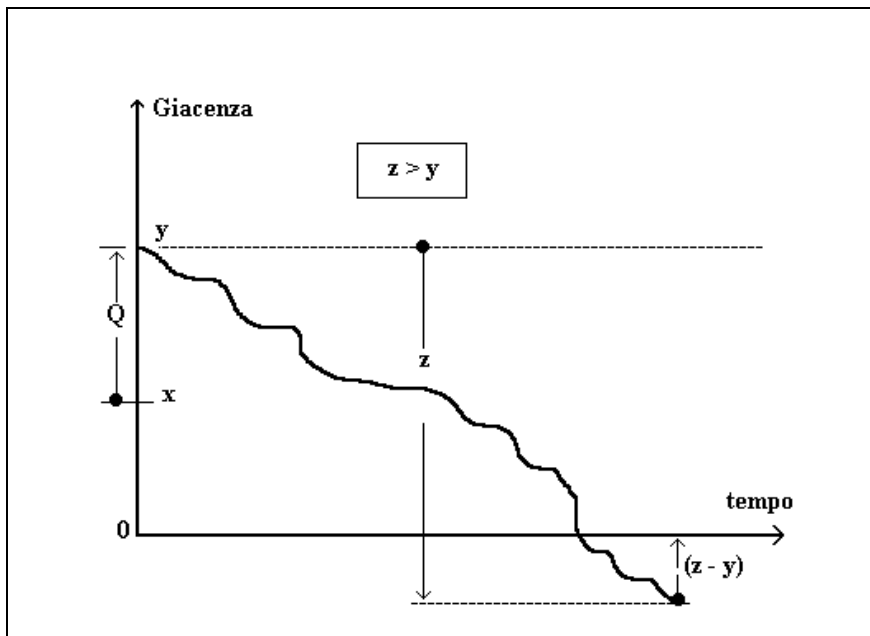
**1° ipotesi** - si considera il costo di preparazione dei lotti nulli, cioè  $k = 0$ ;

**2° ipotesi** - si considera il costo di preparazione dei lotti non nullo, cioè  $k > 0$ .

*Figura n. 2.28*  
*Andamento delle giacenze con domanda probabilistica*  
*Ipotesi di domanda minore dello stock.*



*Figura n. 2.29*  
**Andamento delle giacenze con domanda probabilistica**  
**Ipotesi di rottura dello stock**



**2.9.1 - Modello senza costo di preparazione dei lotti.**

Nel caso in cui  $[k = 0]$  la funzione  $E[L(x,y,z)]$  si riduce a:

$$E[L(x,y,z)] = g(y) - c \cdot x \tag{2.9.7}$$

il cui minimo si ottiene ovviamente ponendo uguale a zero la derivata prima di  $g(y)$  e verificando che la sua derivata seconda sia positiva nel punto di minimo.

Nelle applicazioni concrete è opportuno che  $g(y)$  abbia un unico punto di minimo relativo  $y_0$ . In questo caso la politica ottimale di ordinazione è la seguente:

- se la giacenza iniziale  $[x < y_0]$   $\rightarrow$  ordinare la quantità  $(y_0 - x)$ ;

– se la giacenza iniziale  $[x > y_0]$   $\rightarrow$  non ordinare nulla affinché col tempo la giacenza diminuisca fino al livello  $y_0$ .

Affinché la funzione  $g(y)$  abbia un solo minimo relativo devono verificarsi le seguenti condizioni:

$$g'(0) < 0 \quad (2.9.8)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} g(y) = +\infty \quad (2.9.9)$$

$$g'(y) = 0 \quad (2.9.10)$$

l'equazione ha un'unica soluzione

In pratica i casi che si possono riscontrare sono generalmente tre:

**1° caso** - le funzioni  $H(y - z)$ ,  $V(y - z)$ ,  $P(z - y)$  sono tutte lineari;

**2° caso** - le funzioni  $H(y - z)$ ,  $V(y - z)$ ,  $P(z - y)$  sono tutte di 2° grado;

**3° caso** - le funzioni  $H(y - z)$ ,  $V(y - z)$ , sono lineari, mentre  $P(z - y)$  è di 2° grado.

*1° Caso.*

In questa ipotesi si ha:

$$\begin{cases} H(y - z) = h \cdot (y - z) \\ V(y - z) = v \cdot (y - z) \\ P(z - y) = p \cdot (z - y) \end{cases} \quad (2.9.11)$$

ove  $h$  e  $p$  sono rispettivamente i costi di giacenza per unità di prodotto e di penalità per la rottura dello stock, mentre  $v$  è il valore unitario di recupero dei prodotti invenduti.

$$\begin{aligned}
g(y) = c \cdot y + \int_0^y [h \cdot (y - z) - v \cdot (y - z) - r \cdot z] \cdot f(z) \cdot dz + \\
+ \int_Y^{+\infty} [p \cdot (z - y) - r \cdot y] \cdot f(z) \cdot dz
\end{aligned} \tag{2.9.12}$$

Ponendo:

$$U(y) = \int_y^{+\infty} f(z) dz \quad \text{per } \rightarrow \quad 0 \leq U(y) \leq 1 \tag{2.9.13}$$

e tenendo presente che:

$$\int_0^{+\infty} f(z) dz = 1 \tag{2.9.14}$$

La derivata prima di 1.63 assume la forma:

$$\begin{aligned}
g'(y) &= c + \int_0^y (h - v) \cdot f(z) \cdot dz - \int_y^{+\infty} (p + r) \cdot f(z) \cdot dz = \tag{2.9.15} \\
&= c + h \int_0^y f(z) \cdot dz - v \int_0^y f(z) \cdot dz - p \int_y^{+\infty} f(z) \cdot dz - r \int_y^{+\infty} f(z) \cdot dz = \\
&= c + h \cdot [1 - U(y)] - v \cdot [1 - U(y)] - p \cdot U(y) - r \cdot U(y) = \\
&= c + h - h \cdot U(y) - v + v \cdot U(y) - p \cdot U(y) - r \cdot U(y) = \\
&= (c + h - v) - (h + p + r - v) \cdot U(y)
\end{aligned}$$

Ponendo  $g'(y) = 0$  si ottiene la  $U(y_0)$  ottimale:

$$(c + h - v) - (h + p + r - v) \cdot U(y_0) = 0 \quad (2.9.16)$$

$$U(y_0) = \frac{c + h - v}{h + p + r - v} \quad (2.9.17)$$

Questa formula ha una interessante interpretazione statistica. Per le ipotesi fatte essa assume un valore compreso tra 0 e 1 ed esprime la probabilità che le vendite superino un certo livello  $y_0$ . E' una funzione non crescente che ammette una unica soluzione finita  $y_0$ . Si può concludere che la politica ottimale di ordinazione è quella di portare le scorte ad un livello  $y_0$  tale che la probabilità che le vendite lo superino sia pari al rapporto:

$$\frac{\text{Costo d'acquisto} + \text{Costo di giacenza} - \text{Valore di recupero}}{\text{Costo di giacenza} + \text{Costo di rottura} + \text{Ricavi} - \text{Valore di recupero}}$$

Il valore ottimale di  $g(y)$  corrispondente a  $y_0$  è dato da:

$$g(y_0) = (c - r)M - (h + p + r - v) \int_0^{y_0} (z - y_0) \cdot f(z) \cdot dz \quad (2.9.18)$$

che si ottiene sostituendo nella «2.9.12» la seguente espressione:

$$\int_y^{+\infty} f(z) \cdot dz = \frac{c + h + v}{h + p + r - v} = U(y_0) \quad (2.9.18')$$

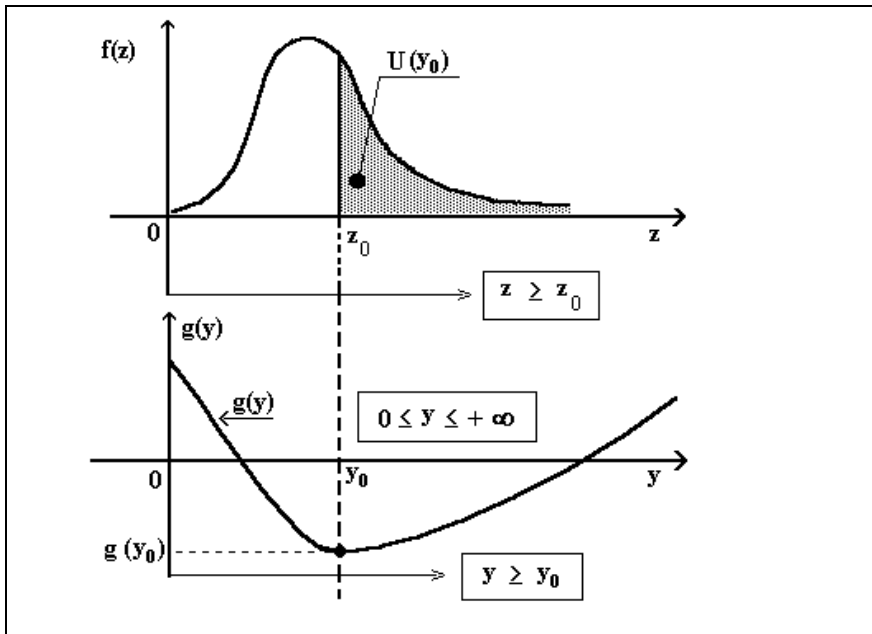
e dove:

$$M = E(z) = \int_0^{+\infty} z \cdot f(z) \cdot dz \quad (2.9.19)$$

rappresenta le vendite medie attese.

Un esempio dell'andamento delle funzioni  $g(y)$  e  $f(z)$  è riportato nel grafico di figura 2.30.

Figura n. 2.30  
**Punto del costo minimo nei modelli probabilistici.**



**Esercizio**

In un magazzino viene gestito un prodotto di cui esiste una giacenza iniziale di  $x = 3.500$  pezzi. La domanda segue la legge di distribuzione normale con media  $\mu = 5.000$  e varianza  $\sigma = 20.000$ .

Si supponga che le funzioni economiche siano lineari e che i parametri riferiti all'unità di prodotto siano:

- costo di giacenza  $h = 3$
- costo d'acquisto  $c = 12$
- valore di recupero  $v = 6$

- ricavo  $r = 30$
- penalità rottura stock  $p = 9$

Si vuole trovare la politica ottimale di ordinazione del prodotto e il relativo *profitto atteso*.

### **Soluzione**

La funzione di probabilità  $f(z)$  nel caso considerato è:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot 20.000}} \cdot e^{\frac{-(z-5.000)^2}{(2 \cdot 20.000)}}$$

La probabilità che la domanda  $z$  sia compresa tra  $y_0$  e  $+\infty$  è:

$$U(y_0) = \frac{3 + 12 - 6}{3 + 30 + 9 - 6} = 0,25$$

La funzione normale di accumulo della probabilità dello 0,25 è:

$$U(y_0) = \int_{y_0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot 20.000}} \cdot e^{\frac{-(z-5.000)^2}{40.000}} dz = 0,25$$

Si utilizzi lo specifico prontuario di calcolo statistico della funzione normale tabulata per determinare  $y_0^{(*)}$ ;

$$\tau_0 = \frac{z - 5.000}{\sqrt{20.000}} = \frac{z - 5.000}{141,42}$$

Si ottiene:

---

(\*) vedasi a tale riguardo, a titolo indicativo: Frosini, Metelka, Montinaro - ESERCIZI DI STATISTICA - pag. 472 e seg.; F. Pesarin - ELEMENTI DI CALCOLO DELLE PROBABILITA' - pag. 426 e seg.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\tau_0}^{+\infty} e^{-\frac{\tau_0^2}{2}} d\tau = U(y_0) = 0,25$$

Dal prontuario di calcolo statistico si ottiene per:

$$\frac{1}{2}\theta(\tau_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau_0^2}{2}} d\tau = 0,50 - U(y_0) = 0,50 - 0,25 = 0,25$$

$$\tau_0 = 0,675$$

E quindi:

$$\tau_0 = \frac{z - 5.000}{141,42} = 0,675$$

$$z = 5.000 + 0,675 \cdot 141,42 = 5.096 \text{ pezzi}$$

Nell'ipotesi in cui  $y_0 = z$  la quantità da ordinare è:

$$Q_0 = y_0 - x = 5.096 - 3500 = 1.596 \text{ pezzi}$$

Il valore minimo di  $g(y)$  è  $g(5.096) = -88.382$  mentre il profitto atteso è di **130.382**. Infatti:

$$\begin{aligned} g(y_0) &= (c - r) \cdot M - (h + r + p - v) \cdot \int_0^{y_0} (z - y_0) \cdot f(z) \cdot dz \\ g(5.096) &= (12 - 30) \cdot 5.000 - (3 + 30 + 9 - 6) \cdot \int_0^{5.096} (z - 5.096) \cdot \frac{e^{-\frac{-(z-5.000)^2}{(2 \cdot 20.000)}}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot 20.000}} \cdot dz = \\ &= -90.000 - 36 \int_0^{5.096} [(z - 5.000) - 96] \cdot \frac{e^{-\frac{-(z-5.000)^2}{(2 \cdot 20.000)}}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot 20.000}} \cdot dz = \end{aligned}$$

Calcolando l'integrale e tenendo conto che:

$$\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot 20.000}} \cdot \int_0^{5.096} e^{\frac{-(z-5.000)^2}{(2 \cdot 20.000)}} dz = 0,25$$

si ottiene

$$= -90.000 + 2.031 \cdot \left. e^{\frac{-(z-5.000)^2}{40.000}} \right|_0^{5.096} + 3.456 \cdot 0,25 =$$

$$= -90.000 + 2.031 \cdot \left[ e^{\frac{-(96)^2}{40.000}} - e^{\frac{-(-5.000)^2}{40.000}} \right] + 864 =$$

$$= -90.000 + 2.031 \cdot [0,794 - 0] + 864 = -87.523$$

$$E[L(x, y, z)] = g(y_0) - c \cdot x$$

$$E[L(3.500; 5.096; 5.096)] = -87.523 - (12 \times 3.500) = -129.523$$

$$\mathbf{Profitto atteso} \Rightarrow \{E[L(3.500; 5.096; 5.096)]\} = 129.523$$

2° Caso.

Si ipotizza che le funzioni  $h(y - z)$ ,  $v(y - z)$  e  $p(z - y)$  siano di 2° grado:

$$\begin{cases} H \cdot (y - z) = h_2 \cdot (y - z)^2 + h_1 \cdot (y - z) \\ V \cdot (y - z) = v_2 \cdot (y - z)^2 + v_1 \cdot (y - z) \\ P \cdot (z - y) = p_2 \cdot (z - y)^2 + p_1 \cdot (z - y) \end{cases} \quad (2.9.20)$$

Si supponga che la funzione di probabilità segua la legge esponenziale negativa con media  $\mu$ :

$$f(z) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{z}{\mu}} \quad (2.9.21)$$

Sostituendo le relazioni suddette nella funzione generale di  $g'(y)$  precedentemente riportata e uguagliando a zero si ottiene il valore ottimale  $y_0$  quale unica radice positiva dell'equazione:

$$g'(y_0) = (c + h_1) - v_1 - 2 \cdot \mu \cdot (h_2 - v_2) + 2 \cdot (h_2 - v_2) \cdot y_0 + e^{-\frac{y_0}{\mu}} [p_1 + 2 \cdot \mu \cdot p_2 + h_1 - v_1 + r - 2 \cdot \mu \cdot (h_2 - v_2)] = 0 \quad (2.9.22)$$

Il valore ottimale di  $g(y_0)$  è dato da:

$$g(y_0) = \mu \cdot (c - r) + (c + h_1 - v_1) \cdot y_0 + (h_2 - v_2) \cdot (y_0)^2 \quad (2.9.23)$$

3° Caso.

Il caso in cui soltanto  $P(z - y)$  è una funzione di 2° grado è spesso ricorrente nelle applicazioni concrete. Ciò significa che le penalità per la rottura dello stock aumenta più che proporzionalmente rispetto all'ammontare delle richieste che non possono essere evase.

E' il tipico caso in cui le carenze di prodotti spingono il consumatore a rifornirsi altrove causando all'azienda perdite elevate per il momentaneo mancato ricavo e la futura perdita di quote di vendita sul mercato, oppure è il caso della carenza di ricambi da sostituire su macchinari guasti che rimangono fermi per lunghi periodi con conseguente perdita di produzione.

In questo caso si ha:

$$\begin{cases} h_1 = h \\ v_1 = v \\ h_2 = v_2 = 0 \end{cases} \quad (2.9.24)$$

Pertanto la funzione  $g'(y_0)$  riportata nel 2° caso si riduce a:

$$g'(y_0) = c + h - v - 2 \cdot \mu \cdot (0 - 0) \cdot y_0 + 2 \cdot (0 - 0) \cdot y_0 - e^{-\frac{y_0}{\mu}} [p_1 + 2 \cdot \mu \cdot p_2 + h - v + r - 2 \cdot \mu \cdot (0 - 0)] \quad (2.9.25)$$

Ponendo detta funzione uguale a zero si ottiene la  $y_0$ :

$$c + h - v - e^{-\frac{y_0}{\mu}} (p_1 + 2 \cdot \mu \cdot p_2 + h + r - v) = 0 \quad (2.9.26)$$

$$e^{\frac{y_0}{\mu}} = \frac{p_1 + 2 \cdot \mu \cdot p_2 + h + r - v}{c + h - v} \quad (2.9.27)$$

$$y_0 = \mu \cdot \lg \left[ \frac{(p_1 + 2 \cdot \mu \cdot p_2 + h + r - v)}{(c + h - v)} \right] \quad (2.9.28)$$

Il costo ottimale è dato da:

$$g(y_0) = \mu \cdot (c - r) + (c + h - v) \cdot y_0 \quad (2.9.29)$$

### ***Esercizio***

Si consideri il caso di un'azienda che deve rifornire, nel periodo di garanzia, dei "*particolari*" di ricambio da sostituire su macchinari che la stessa produce e commercializza.

La domanda segue la legge esponenziale negativa con media  $\mu = 250$ .

I costi unitari d'acquisto e di giacenza sono rispettivamente  $c = 35$  e  $h = 10$ .

Poiché i particolari vengono riforniti gratuitamente e sono soggetti a forte obsolescenza i ricavi di vendita e di recupero sono nulli, cioè  $r = v = 0$ .

La penalità per l'eventuale mancata evasione delle richieste delle parti di ricambio è elevata in quanto è causa di perdite di vendite del macchinario nuovo.

La mancata evasione di 250 pezzi provoca una perdita di 17.500, mentre la mancata evasione di 500 pezzi provoca una perdita di 60.000.

Supponendo che la giacenza iniziale sia nulla, si calcoli la quantità ottimale da ordinare e il relativo costo minimo atteso.

### ***Soluzione***

Si calcolino i parametri dell'equazione:

$$p_1(z - y) = p_2 \cdot (z - y)^2 + p_1 \cdot (z - y)$$

Risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} p_2(250)^2 + p_1(250) = 17.500 \\ p_2(500)^2 + p_1(500) = 60.000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 62.500 \cdot p_2 + 250 \cdot p_1 = 17.500 \\ 250000 \cdot p_2 + 500 \cdot p_1 = 60.000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1 = 20 \\ p_2 = 0,2 \end{cases}$$

La quantità ottimale da ordinare è  $Q_0 = (y_0 - x) = (y_0 - 0) = y_0$ :

$$y_0 = \mu \cdot \lg \left[ \frac{p_1 + 2 \cdot \mu \cdot p_2 + h}{c + h} \right] = 250 \cdot \lg \left[ \frac{20 + (2 \cdot 250 \cdot 0,2) + 10}{35 + 10} \right] =$$

$$= 250 \cdot \lg(2,89) = 265$$

Il costo minimo atteso è:

$$g(y_0) = \mu \cdot (c - r) + y_0 \cdot (c + h) = 250 \cdot (35 - 0) + 265 \cdot (35 + 10 - 0) = 20.675$$

Si supponga invece che in caso di penuria di 500 particolari la perdita sia di 35.000; si ottiene:

$$\begin{cases} 62.500 \cdot p_2 + 250 \cdot p_1 = 17.500 \\ 250.000 \cdot p_2 + 500 \cdot p_1 = 35.000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1 = 70 \\ p_2 = 0 \end{cases}$$

$$Y_0 = \mu \cdot \lg \left[ \frac{p_1 + h}{c + h} \right] = 250 \cdot \lg \left[ \frac{70 + 10}{35 + 10} \right] = 250 \cdot \lg(1,78) = 144$$

$$g(y_0) = \mu \cdot (c - r) + y_0 \cdot (c + h - v) = 250 \cdot (35 - 0) + 144 \cdot (35 + 10 - 0) = 15.230$$

Questo calcolo mette in evidenza l'importanza di determinare, con la migliore precisione possibile, i costi di penalità per la rottura delle scorte essendo, detta componente, quella che può incidere sensibilmente sui risultati economici di gestione.

### **2.9.2 - Modello con costo di preparazione dei lotti.**

In questo caso oltre al costo marginale  $c$  esiste anche un costo di preparazione dei lotti ( $k > 0$ ).

Il valore atteso di  $L(x, y, z)$  è dato dalla funzione generale:

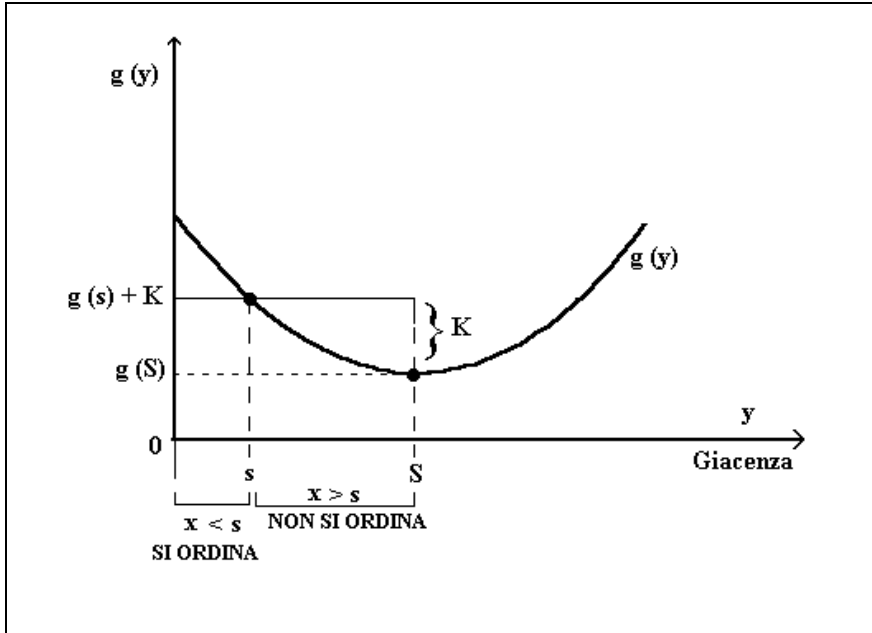
$$E[L(x, y, z)] = g(y) - c \cdot x + k \quad (2.9.30)$$

Qualora la funzione  $g(y)$  abbia un unico punto di minimo in  $y_0$ , che si indica con  $S$ , la politica ottimale di ordinazione che prende il nome di "*politica (s, S)*", è la seguente:

- 1) Si calcola un livello critico non negativo  $s$ , minore di  $S$  tale che  $[g(s) = g(S) + k]$ .  
Se non esiste alcun  $s$  che soddisfa la suddetta relazione si pone  $s = 0$ ;
- 2) Se la giacenza iniziale  $x$  è minore di  $s$ , si ordina la quantità  $Q = S - x$  altrimenti non si ordina nulla.

Nella *figura 2.31* è riprodotto l'andamento della funzione  $g(y)$  nel caso ora descritto.

*Figura n. 2.31*  
*Politica s, S.*



Si può verificare che se  $g(y)$  soddisfa alle condizioni trattate nel caso in cui  $k = 0$ , la "Politica (s,S)" è ottimale.

Infatti, quando  $x < s$  è conveniente ordinare fino a  $S$  altrimenti il costo totale  $g(y)$  salirebbe oltre il livello del costo minimo della funzione  $[g(y) + k]$  (parte a sinistra del punto  $s$  sul grafico).

Quando invece  $x > s$  non conviene ordinare in quanto la riduzione del costo totale  $g(y)$  che deriva non compensa il costo costante  $K$  di preparazione del lotto.

In quest'ultimo caso il costo totale di giacenza è dato da  $[g(y) + k]$  le cui ordinate sono maggiori di  $k$  rispetto alla  $g(y)$  (parte compresa tra  $s$  e  $S$  del grafico).

## - III - IL TRASPORTO

### 3.1 - ORIGINE DEL NOME.

Il nome inglese di "*Transportation Problem*" venne dato da matematici che per primi negli anni 1955 - 1960 affrontarono i problemi di *programmazione lineare* (Dantzing, Vögel, Houthakker, Friedman, Kuhn, Ford, Fulkerson, Vidale, Dwyer, Galler e Zimmer tra i principali).

Il motivo di questo nome era dovuto al naturale contesto in cui il problema si adattava per definire modelli di ottimizzazione nel campo delle spedizioni.

Attualmente il problema trova applicazione anche in casi che nulla hanno a che fare col trasporto.

### 3.2 - NATURA DEL PROBLEMA.

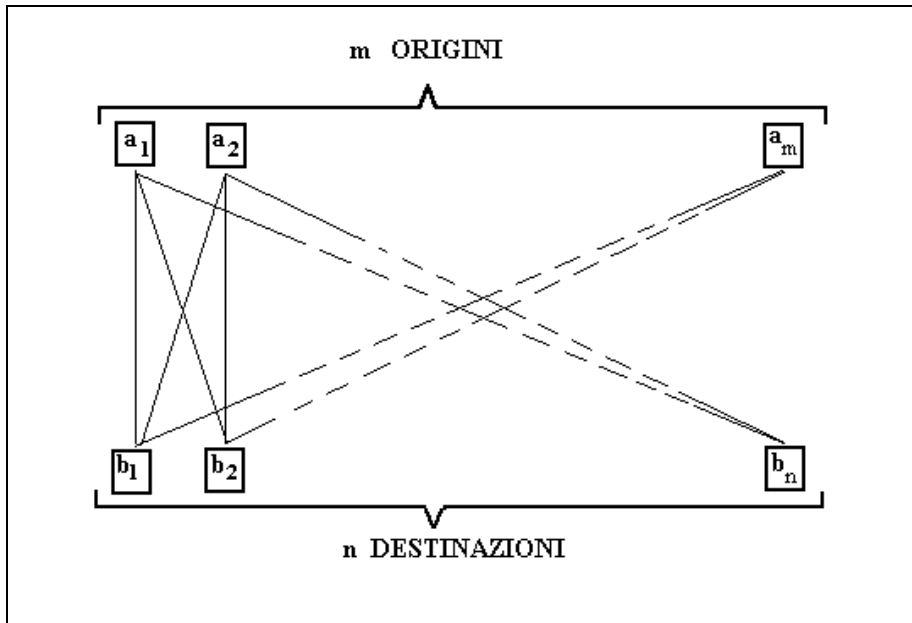
Un problema lineare di trasporto consiste nel trovare uno schema di distribuzione tra  $m$  origini date ove si trovano le rispettive  $a_i$  unità disponibili per  $i = 1, 2, 3, \dots, m$  e  $n$  destinazioni che richiedono  $b_j$  unità per  $j = 1, 2, 3, 4, \dots, n$  in modo tale che il costo totale di trasporto sia minimo dati gli  $(n \cdot m)$  costi unitari tra l'origine  $i$  e la destinazione  $j$ :

$$C_{i,j} \geq 0 \rightarrow \text{per } \begin{cases} i = 1, 2, 3, \dots, m \\ j = 1, 2, 3, \dots, n \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Le rispettive unità di assegnazione, che costituiscono le variabili di decisione sono:

$$x_{i,j} \geq 0 \quad \leftarrow \quad \text{variabili di decisione} \quad (3.2.2)$$

*Figura n. 3.1*  
*Schema dei trasporti*



### 3.3 - MODELLO MATEMATICO.

Tenendo presente lo schema generale della *programmazione lineare* e quanto introdotto nel precedente paragrafo, si può sintetizzare il modello matematico per il **Problema del Trasporto** come di seguito indicato.

Sia le quantità di assegnazione che i costi unitari di trasporto possono essere considerati come elementi di una matrice di ordine  $(m \cdot n)$ .

La matrice delle assegnazioni viene comunemente denominata "*matrice dei trasporti*". La sommatoria delle quantità assegnate deve essere uguale alla sommatoria delle quantità disponibili e alla sommatoria delle quantità richieste. Tale condizione è detta di "*bilanciamento del sistema*".

Figura n 3.2  
Matrice dei trasporti

		DESTINAZIONI					
		1	2	3	.....	n	
ORIGINI	1	$X_{1,1}$	$X_{1,2}$	$X_{1,3}$	$X_{1,4}$	$X_{1,5}$	$a_1$
	2	$X_{2,1}$	$X_{2,2}$	$X_{2,3}$	$X_{2,4}$	$X_{2,5}$	$a_2$
	3	.....	.....	.....	.....	.....	$a_3$
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
(m-1)	$X_{(m-1),1}$	$X_{(m-1),2}$	$X_{(m-1),3}$	$X_{(m-1),4}$	$X_{(m-1),5}$		
m	$X_{m,1}$	$X_{m,2}$	$X_{m,3}$	$X_{m,4}$	$X_{m,5}$	$a_m$	
		$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	
		RICHIESTE					

*Figura n. 3.3*  
*Matrice dei costi unitari*

		DESTINAZIONI				
		1	2	3	.....	n
ORIGINI	1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	$C_{1,3}$	$C_{1,4}$	$C_{1,n}$
	2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	$C_{2,3}$	$C_{2,4}$	$C_{2,n}$
	3	.....	.....	.....	.....	.....
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
(m-1)	$C_{(m-1),1}$	$C_{(m-1),2}$	$C_{(m-1),3}$	$C_{(m-1),4}$	$C_{(m-1),n}$	
m	$C_{m,1}$	$C_{m,2}$	$C_{m,3}$	$C_{m,4}$	$C_{m,n}$	

*La funzione obiettivo da minimizzare è data da:*

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{i,j} \cdot x_{i,j} \leftarrow \text{Min} \quad (3.3.1)$$

sottoposta ai seguenti *vincoli*:

$$\sum_{j=1}^m x_{i,j} = a_{i,j} \quad \text{per } i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (3.3.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{i,j} = b_{i,j} \quad \text{per } j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.3.3)$$

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{i,j} \leftarrow \begin{cases} \text{condizione di} \\ \text{bilanciamento} \\ \text{del sistema} \end{cases} \quad (3.3.4)$$

dove  $x_{i,j} \geq 0$  per tutte le  $i$  e le  $j$ .

### 3.4 - IDENTIFICAZIONE DELLE SOLUZIONI ACCETTABILI DI BASE.

Per il *problema del trasporto* le soluzioni accettabili di base possono essere trovate utilizzando il metodo del semplice, normalmente applicato per il problema generale della *programmazione lineare*.

Considerato che i coefficienti dei vincoli sono tutti di valore uno oppure zero, è stato possibile trovare una procedura risolutiva molto più efficace del metodo del semplice conducendo direttamente la ricerca delle soluzioni di base sulla *matrice dei trasporti* piuttosto che sull'insieme originale delle equazioni mediante iterazioni successive che consentono di ridurre al minimo il costo totale.

Poiché il modello del trasporto contiene  $m$  origini ed  $n$  destinazioni il numero delle equazioni dei vincoli è  $(m+n)$ .

Il sistema delle  $(m+n)$  equazioni non è linearmente indipendente in quanto esiste la condizione di bilanciamento:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (3.4.1)$$

Un vincolo risulta pertanto ridondante e si può di conseguenza impostare un sistema di  $(n+m-1)$  equazioni linearmente indipendenti che consentano di trovare un uguale numero di assegnazioni diverse da zero nella matrice del trasporto:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{i,j} = \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad \leftarrow \quad 1^a \text{ equazione} \quad (3.4.2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{i,j} = a_i \quad \text{per } i=1,2,3,\dots,(m-1) \quad \leftarrow \quad (m-1) \text{ equazioni} \quad (3.4.3)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{i,j} = b_j \quad \text{per } j=1,2,3,\dots,(n-1) \quad \leftarrow \quad (n-1) \text{ equazioni} \quad (3.4.4)$$

Il rimanente numero di incognite è:

$$n \cdot m - (m + n - 1) = (m - 1) \cdot (n - 1)$$

esse assumono tutte valore zero.

In altre parole ciò significa che possiamo fissare  $(m-1)(n-1)$  incognite uguali a zero e ricavare tutte le altre diverse da zero risolvendo le  $(m+n-1)$  equazioni linearmente indipendenti.

Una soluzione è accettabile di base non degenerata se gode delle seguenti proprietà:

- 1) tutte le  $x_{i,j} \geq 0$  (condizione di accettabilità);
- 2) contiene esattamente  $(m+n-1)$  assegnazioni strettamente positive mentre le assegnazioni uguali a zero sono  $(m-1)(n-1)$ ;
- 3) le assegnazioni devono essere **indipendenti**.

### 3.5 - RICERCA DELLE SOLUZIONI ACCETTABILI DI BASE INIZIALI.

Esistono diversi metodi per la determinazione di una soluzione accettabile di base iniziale nel *problema del trasporto*.

Quelli più conosciuti e più frequentemente applicati sono:

- a) "Regola dell'angolo di Nord-Ovest";
- b) "Metodo dell'approssimazione di Vögel";
- c) "Metodo delle assegnazioni mutualmente preferibili di Houthakker".

**A - Regola dell'angolo di Nord-Ovest.**

Tale regola prevede di operare sulla "*matrice dei trasporti*" partendo dalla posizione  $(1,1$  - cioè dal punto a *Nord-Ovest* della stessa) nella quale deve essere fatta la massima assegnazione possibile nel rispetto dei vincoli di origine e destinazione (minima quantità tra il totale della riga 1 e della colonna 1).

Si procede poi spostandosi in basso e verso destra (verso Sud-Est) fino all'esaurimento delle disponibilità e delle richieste (il che avviene sempre se il problema è bilanciato).

Questo procedimento consente di determinare  $(n+m-1)$  assegnazioni diverse da zero e di lasciare  $[(m-1)(n-1)]$  caselle vuote (cioè con assegnazioni uguali a zero). Si può dimostrare che questa è una soluzione accettabile di base.

**Esempio:**

La matrice dei trasporti iniziale è:

		DESTINAZIONI					DISPONIBILITA'
		1	2	3	4	5	
<b>O</b>	<b>1</b>	?	?	?	?	?	<b>40</b>
<b>RI</b>	<b>2</b>	?	?	?	?	?	<b>60</b>
<b>GI</b>	<b>3</b>	?	?	?	?	?	<b>90</b>
<b>NI</b>	<b>4</b>	?	?	?	?	?	<b>50</b>
<b>RICHIESTE</b>		<b>30</b>	<b>40</b>	<b>70</b>	<b>40</b>	<b>60</b>	<b>240</b>

La matrice dei trasporti con la prima soluzione accettabile di base trovata col metodo dell'angolo Nord-Ovest è:

		DESTINAZIONI					DISPONIBILITA'
		1	2	3	4	5	
<b>O</b>	<b>1</b>	<b>30</b>	<b>10</b>	0	0	0	<b>40</b>
<b>RI</b>	<b>2</b>	0	<b>30</b>	<b>30</b>	0	0	<b>60</b>
<b>GI</b>	<b>3</b>	0	0	<b>40</b>	<b>40</b>	<b>10</b>	<b>90</b>
<b>NI</b>	<b>4</b>	0	0	0	0	<b>50</b>	<b>50</b>
<b>RICHIESTE</b>		<b>30</b>	<b>40</b>	<b>70</b>	<b>40</b>	<b>60</b>	<b>240</b>

### **B - Metodo dell'approssimazione di Vögel.**

Questo metodo con maggiore probabilità consente di identificare una soluzione accettabile di base "vicina" alla soluzione ottima e quindi di raggiungerla con un minore numero di iterazioni rispetto alla regola dell'angolo Nord-Ovest in quanto è basato sull'uso delle

**"differenze di minima penalità"** associate ad ogni riga e colonna calcolate sulla **"matrice dei costi unitari  $c_{i,j}$ "**.

Una **"differenza di minima penalità"** di riga o di colonna è definita come differenza aritmetica fra l'elemento più piccolo e quello immediatamente superiore in quella riga o colonna. Essa indica la penalità minima unitaria a cui si andrebbe incontro se si sbagliasse nel fare una assegnazione all'elemento di minore costo in quella riga o colonna.

Le massime assegnazioni possibili vengono fatte nelle caselle con costi unitari più piccoli in corrispondenza delle colonne o righe con la più grande **"differenza di minima penalità"**.

I passi da compiere col metodo di approssimazione di Vögel sono i seguenti:

- 1 - costruire la tavola dei costi unitari e delle richieste e disponibilità;
- 2 - calcolare le **"differenze di minima penalità"** per ogni riga e colonna;
- 3 - scegliere la riga o la colonna con la **"differenza di minima penalità"** più grande (in caso di uguaglianza la scelta è arbitraria);
- 4 - effettuare un'assegnazione massima all'elemento di costo minimo su quella riga o colonna;
- 5 - mettere a zero le altre assegnazioni nella riga o colonna ove è soddisfatta la disponibilità o la richiesta;
- 6 - eliminare tutte le righe e le colonne assegnate completamente e fermarsi se non resta più alcuna riga o colonna. Altrimenti procedere sulla **matrice ridotta** dei costi unitari partendo dalla fase 2.

### **Esempio:**

Si consideri la seguente matrice dei costi unitari con disponibilità e richieste per la quale sono state calcolate le differenze di minima penalità delle righe e delle colonne:

### FASE 1

*Matrice dei costi unitari con disponibilità e richieste.*

		DESTINAZIONI				DISPONIBILITA'	Differenze	
		1	2	3	4			
ORI	1	5	8	3	6	30	2	
GI	2	4	5	7	4		50	0
NI	3	6	2	4	5		40	2
<b>RICHIESTE</b>		30	20	40	30	120		
<b>Differenze</b>		1	3	1	1			

↑

Diff.

Max.

**prima assegnazione  $x(3,2) = 20$**

La differenza massima si trova nella 2° colonna e pertanto la prima assegnazione è stata fatta nella *casella (3.2)* a cui corrisponde il costo minimo della colonna pari a 2.

Si proceda ora con lo stesso criterio come evidenziano le *iterazioni* 2, 3, 4 di seguito riportate. Si giunge alla soluzione accettabile di base di cui al punto 5. Si può constatare che questa ammette 6 assegnazioni maggiori di zero ( $n+m-1 = 3+4-1 = 6$ ).

**FASE 2**

		DESTINAZIONI				DISPONIBILITA'	Differenze
		1	2	3	4		
ORI	1	5	.	3	6	30	2 (*)
GI	2	4	.	7	4	50	0
NI	3	6	.	4	5	20	1
<b>RICHIESTE</b>		<b>30</b>	<b>.</b>	<b>40</b>	<b>30</b>	<b>100</b>	
<b>Differenze</b>		<b>1</b>	<b>.</b>	<b>1</b>	<b>1</b>		

(\*) = Diff. Max. = 2

seconda assegnazione  $x(1,3) = 30$ .

**FASE 3**

		DESTINAZIONI				DISPONIBILITA'	Differenze
		1	2	3	4		
ORI	1	.	.	.	.	.	.
GI	2	4	.	7	4	50	0
NI	3	6	.	4	5	20	1
<b>RICHIESTE</b>		<b>30</b>	<b>.</b>	<b>10</b>	<b>30</b>	<b>70</b>	
<b>Differenze</b>		<b>2</b>	<b>.</b>	<b>3</b>	<b>1</b>		

↑

Diff.

Max.

terza assegnazione  $x(3,3) = 10$ .

**FASE 4**

		DESTINAZIONI				DISPONIBILITA'	Differenze
		1	2	3	4		
<b>ORI</b>	1	.	.	.	.	50	.
<b>GI</b>	2	4	.	.	4		0
<b>NI</b>	3	6	.	.	5		1
<b>RICHIESTE</b>		30	.	.	30	60	
<b>Differenze</b>		2	.	.	1		

↑

Diff.

Max.

**quarta assegnazione**                       $x(2,1) = 30$

**quinta assegnazione**                      $x(2,4) = 20$

**sesta assegnazione**                       $x(3,4) = 10$

**- FASE 5 -**

*Soluzione accettabile di base di Vögel*

		DESTINAZIONI				DISPONIBILITA'	
		1	2	3	4		
<b>ORI</b>	1	0	0	30	0	30	
<b>GI</b>	2	30	0	0	20		50
<b>NI</b>	3	0	20	10	10		40
<b>RICHIESTE</b>		30	20	40	30	120	

come si può constatare, la soluzione è accettabile di base in quanto ammette 6 assegnazioni maggiori di zero ( $m+n-1 = 3 + 4 - 1 = 6$ ).

**C - Metodo delle assegnazioni mutualmente preferibili di Houthakker.**

Anche questo metodo riconduce l'analisi per la ricerca della soluzione accettabile di base iniziale alla *matrice dei costi unitari*.

Una assegnazione  $x_{ij}$  relativa a una origine  $i$  e a una destinazione  $j$  è mutualmente preferibile se  $j$  è la destinazione meno costosa per  $i$  e se  $i$  è l'origine meno costoso per  $j$ . Ciò vuol dire che il costo unitario è il minore nella rispettiva riga e colonna.

Si effettua l'assegnazione massima nella casella corrispondente e si eliminano le linee e le colonne già formate.

Tale operazione deve essere ripetuta fino ad ottenere una soluzione di base.

**Esempio:**

Si consideri la sotto riportata *matrice dei costi unitari* con disponibilità e richieste. Sulla stessa sono stati evidenziati i costi unitari delle caselle **1,3** e **3,1** che sono rispettivamente i costi minimi unitari della 1° riga - 3° colonna e 3° riga - 1° colonna. La 1° e la 2° assegnazione sono pertanto fatte in dette caselle.

**FASE 1**

		DESTINAZIONI					DISPONIBILITA'
		1	2	3	4	5	
ORI	1	10	20	5	9	10	90
GI	2	2	10	8	30	6	
NI	3	1	20	7	10	4	
RICHIESTE		30	50	40	60	30	210

(\*)

(\*\*)

(\*) - 1° assegnazione mutualmente preferibile:  $x_{3,1} = 30$

(\*\*) - 2° assegnazione mutualmente preferibile:  $x_{1,3} = 40$

Le altre iterazioni (2, 3, 4) consentono di trovare la soluzione accettabile di base riportate al punto 5. Si può constatare che questa ha 7 assegnazioni maggiori di zero ( $m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$ ).

### FASE 2

		DESTINAZIONI					DISPONIBILITA'
		1	2	3	4	5	
ORI	1	.	20	.	9	10	50
GI	2	.	10	.	30	6	
NI	3	.	20	.	10	4	
RICHIESTE		.	50	.	60	30	140

(\*\*\*\*)

(\*\*\*)

(\*\*\*) - 3° assegnazione mutualmente preferibile:  $x_{3,5} = 30$

(\*\*\*\*) - 4° assegnazione mutualmente preferibile:  $x_{1,4} = 50$

### FASE 3

		DESTINAZIONI					DISPONIBILITA'
		1	2	3	4	5	
ORI	1	.	.	.	.	.	40
GI	2	.	10	.	30	.	
NI	3	.	20	.	10	.	
RICHIESTE		.	50	.	10	.	60

(°)

(°°)

(°) - 5° assegnazione mutualmente preferibile:  $x_{2,2} = 40$

(°°) - 6° assegnazione mutualmente preferibile:  $x_{3,2} = 10$

### FASE 4

		DESTINAZIONI					DISPONIBILITA'
		1	2	3	4	5	
ORI	1	.	.	.	.	.	10
GI	2	.	.	.	.	.	
NI	3	.	20	.	.	.	
RICHIESTE		.	10	.	.	.	10

(°°)

(°°°) - 7° assegnazione mutualmente preferibile:  $x_{3,2} = 10$

### FASE 5

*Matrice dei trasporti con la soluzione accettabile di base iniziale*

		DESTINAZIONI					DISPONIBILITA'
		1	2	3	4	5	
ORI	1	0	0	40	50	0	90
GI	2	0	40	0	0	0	40
NI	3	30	10	0	10	30	80
RICHIESTE		30	50	40	60	30	210

### 3.6 - RICERCA DELLA SOLUZIONE OTTIMA.

Per il problema del trasporto si può ricercare la soluzione ottima partendo da una soluzione accettabile di base iniziale usando il "*Metodo dello stepping-stone*" (il termine anglosassone significa scalino, marciapiede), detto anche "*Metodo dei piccoli passi*", studiato dal matematico americano *Dantzig*.

Questo metodo in sostanza è simile a quello del semplice in quanto partendo dalla soluzione iniziale di base fa entrare ed uscire dalla base stessa opportune variabili che gradualmente fanno ridurre il costo totale.

Il metodo consiste nell'individuare quelle posizioni libere (cioè con assegnazione nulla) che consentono di ridurre il costo e nelle quali vengono fatte le massime assegnazioni spostando le unità da altre posizioni occupate, in modo tale da non alterare l'equilibrio tra disponibilità e richieste totali delle righe e colonne.

Occorre quindi individuare i "*cicli iterativi*" per lo spostamento delle unità nella matrice dei trasporti e le "*valutazioni dei costi marginali unitari*" (operando sulla matrice dei costi unitari) che consentono di verificare se le soluzioni ottenute sono ottime o meno.

#### **A - Algoritmo per l'individuazione dei cicli iterativi**

- 1 - Si segnino con una  $x$  le  $(m+n-1)$  celle che stanno nella base;
- 2 - si segni con una  $x$  la cella vuota di partenza da fare entrare nella base;
- 3 - si eliminino tutte le righe e tutte le colonne che contengono una sola  $x$ ;
- 4 - si ripeta l'operazione del punto 3 fino a quando non sono state cancellate tutte le linee con una sola  $x$ ;
- 5 - le celle rimaste sono solo quelle del ciclo determinato partendo dalla cella iniziale  $x$  e procedendo in senso orario o antiorario si può tracciare il ciclo iterativo cercato.

Per applicare il metodo dello *stepping-stone* non si devono aver soluzioni che presentino cicli chiusi che collegano caselle con tutte assegnazioni diverse da zero, in quanto dette soluzioni non sarebbero di base e il sistema delle equazioni dei vincoli non sarebbe indipendente.

Un esempio di ricerca di un ciclo iterativo è riportato di seguito:

*Ricerca di un ciclo iterativo nel problema dei trasporti*

*Passo 1 e 2*

40   X	50   X	10   X	☒	
		60   X		60   X
			90   X	30   X

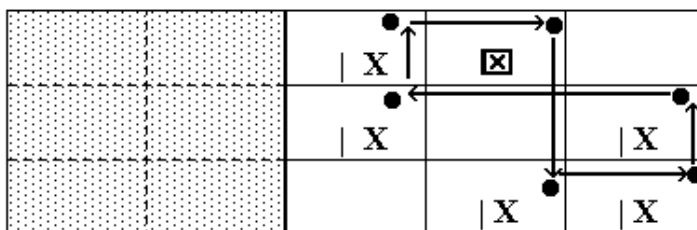


*Passo 3 e 4*

40   X	50   X	10   X	☒	
		60   X		60   X
			90   X	30   X



*Passo 5*



**B - Algoritmo per la determinazione delle valutazioni dei costi marginali unitari**

La valutazione  $\delta_{i,j}$  relativa alla posizione della riga  $i$  e della colonna  $j$  misura di quanto varia (in aumento o in diminuzione) il costo di trasporto conseguentemente allo spostamento in detta posizione di una unità proveniente da una altra posizione. Per una casella vuota (cioè con assegnazione zero) di posizione  $(i,j)$  la valutazione è data da:

$$\delta_{i,j} = C_{i,j} - (u_i + v_j) \quad (3.6.1)$$

ove  $C_{i,j}$  è il costo unitario di trasporto relativo alla casella considerata, mentre  $u_i$  e  $v_j$  sono variabili che derivano per ogni casella in cui esiste una assegnazione di posizione  $r,s$  dalla relazione:

$$\delta_{r,s} = 0 = C_{r,s} - (u_r + v_s) \quad (3.6.2)$$

cioè

$$C_{r,s} = u_r + v_s \quad (3.6.3)$$

La loro determinazione avviene risolvendo le  $(n+m-1)$  equazioni relative alle caselle occupate e date dalle relazioni sopra citate ( $C_{r,s} = u_r + v_s$ ). Una volta determinate tutte le  $u_i$  e le  $v_s$  si possono calcolare le  $\delta_{i,j}$  per ogni casella libera e quindi, dal loro valore relativo, si può determinare immediatamente qual'è la variabile entrante nella base.

Si possono verificare tre ipotesi:

- 1°) **tutte le  $\delta_{i,j} > 0 \rightarrow$**  la soluzione di base trovata è ottimale in quanto nessuna altra soluzione non di base può diminuire la funzione obiettivo  $Z$ ;
- 2°) **almeno una  $\delta_{i,j} < 0 \rightarrow$**  la soluzione di base trovata **non** è ottimale in quanto esistono ancora delle possibilità di diminuire la funzione obiettivo  $Z$ ;

3°) esistono alcune  $\delta_{i,j} = 0$  quando tutte le altre sono  $\delta_{i,j} > 0 \rightarrow$  la soluzione di base trovata è ottimale ma esistono anche altre soluzioni di base ottimali in numero corrispondente alle altre valutazioni uguali a zero.

Di seguito viene riportato un esempio di ciclo iterativo che dimostra quanto sopra esposto.

**Dimostrazione**

*(Matrice dei trasporti con una soluzione accettabile di base di partenza che consente di determinare le  $u_i$  e le  $v_i$ )*

		DESTINAZIONI					
		1	2	3	4	5	
O	1	■		(-1)	(+1)		$U_1$
RI	2		■		(-1)	(+1)	$U_2$
GI	3			☒ (+1)		(-1)	$U_3$
NI	4	■					$U_4$
		$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$V_5$	

$$\begin{aligned}
 \delta_{3,3} &= +C_{3,3} - C_{1,3} + C_{1,4} - C_{2,4} + C_{2,5} - C_{3,5} = \\
 &= +C_{3,3} - (u_1 + v_3) + (u_1 + v_4) - (u_2 + v_4) + (u_2 + v_5) - (u_3 + v_5) = \\
 &= +C_{3,3} - u_1 - v_3 + u_1 + v_4 - u_2 - v_4 + u_2 + v_5 - u_3 - v_5 = \\
 &= C_{3,3} - (u_3 + v_3) \leftarrow \text{valutazione della casella (3,3)}
 \end{aligned}$$

Con lo stesso criterio possono essere calcolate le altre  $\delta_{i,j}$  delle caselle vuote.

### 3.7 - CASI PARTICOLARI.

Nei problemi di trasporto si può incorrere talvolta in uno dei casi particolari di seguito menzionati.

#### A - *Le disponibilità superano le richieste.*

In questo caso si avranno  $m$  vincoli di minoranza che conducono a un sistema non bilanciato.

Per poter ristabilire la condizione:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (3.7.1)$$

occorre introdurre delle variabili "*slack*" nei vincoli.

Ciò equivale a dire che vengono create delle destinazioni supplementari fittizie a cui vengono fatti corrispondere dei costi unitari uguali a zero o di valore trascurabile  $\epsilon$  che consentono di effettuare l'assegnazione delle quantità eccedenti subito alla prima iterazione e di risolvere poi normalmente il problema col metodo dello *stepping-stone*.

#### B - *Le richieste superano le disponibilità.*

Questo caso non ha soluzione da un punto di vista pratico, anche se teoricamente si può ipotizzare di creare delle origini fittizie da cui ottenere le disponibilità mancanti e risolvere il problema ponendo i costi unitari corrispondenti a dette origini con un valore "*molto grande*"  $M$  che consenta di ottenere prima tutte le assegnazioni nelle posizioni reali e per ultimo allocare le unità delle destinazioni fittizie che misurano la domanda inevasa.

### C - *Caso di soluzione accettabile di base degenera.*

Talvolta nella risoluzione dei problemi di trasporto col Metodo dello *stepping-stone* si ottengono *soluzioni degeneri*, cioè con *meno di  $(n+m-1)$*  assegnazioni diverse da zero.

Ciò avviene normalmente quando esistono nella soluzione di base di partenza due assegnazioni uguali non posizionate in caselle consecutive nel ciclo iterativo individuato per la ricerca di una nuova soluzione di base. In tale circostanza infatti si verifica che, facendo uscire dalla vecchia base una delle due variabili considerate, anche l'altra variabile di uguale assegnazione raggiunge simultaneamente lo zero, ottenendo così una nuova soluzione di base con solo  $(n+m-2)$  assegnazioni.

Anche per questo caso comunque è possibile risolvere il problema assegnando alla variabile *degenera* una quantità fittizia infinitamente piccola, normalmente viene indicata con  $\epsilon$ , da utilizzare nelle successive iterazioni come se fosse una assegnazione reale che poi, una volta raggiunta la soluzione ottima, può essere abbandonata.

#### *Esempio:*

Si consideri la matrice dei trasporti sotto riportata con una soluzione accettabile di base iniziale. Sulla stessa è tracciato il nuovo ciclo di iterazione (-30 unità dalla posizione 3,3 alla posizione 2,3).

Come si può notare le unità assegnate nella casella 2,1 (30 unità) sono uguali a quelle della casella non consecutiva 3,3, pertanto nella nuova soluzione escono dalla base due variabili e ne entra una solamente. La nuova soluzione è quindi *degenera* (ha 7 assegnazioni invece di 8). La quantità trascurabile  $\epsilon$  viene posta arbitrariamente nella casella 3,3 per consentire di effettuare nuove iterazioni.

**FASE 1**  
*Soluzione accettabile di base iniziale*

		DESTINAZIONI					DISPONIBILITA'
		1	2	3	4	5	
1						40	40
2		(-) ↑ 30				10	60
3							70
4						40	50
RICHIESTE		30	40	50	40	60	220

**FASE 2**  
*Nuova soluzione accettabile di base*

		DESTINAZIONI					DISPONIBILITA'
		1	2	3	4	5	
O	1					40	40
RI	2			50		10	60
GI	3	30	40	ε			70
NI	4				40	10	50
RICHIESTE		30	40	50	40	60	220

**3.8 - ESERCIZIO**

Sia dato il problema dei trasporti avente la seguente matrice dei costi-richieste-disponibilità:

**- FASE 1 -**  
**Matrice di partenza**

		DESTINAZIONI						DISPONIBILITA'
		1	2	3	4	5	6	
O	1	9	12	9	6	9	10	5
RI	2	7	3	7	7	5	5	6
GI	3	6	5	9	11	3	11	2
NI	4	6	8	11	2	2	10	9
RICHIESTE		4	4	6	2	4	2	22

- A) - usare la regola dell'*angolo Nord-Ovest* per ottenere una soluzione accettabile di base del problema;
- B) - usare il *metodo dell'approssimazione di Vögel* per ottenere la soluzione accettabile di base;
- C) - trovare la soluzione ottima.

**Soluzione**

**Funzione obiettivo da minimizzare:**  $\rightarrow Z = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^6 (x_{i,j}) \cdot (C_{i,j}) =$

$$\begin{aligned}
 = & 9x_{1,1} + 12x_{1,2} + 9x_{1,3} + 6x_{1,4} + 9x_{1,5} + 10x_{1,6} + \\
 & + 7x_{2,1} + 3x_{2,2} + 7x_{2,3} + 7x_{2,4} + 5x_{2,5} + 5x_{2,6} + \\
 & + 6x_{3,1} + 5x_{3,2} + 9x_{3,3} + 11x_{3,4} + 3x_{3,5} + 11x_{3,6} + \\
 & + 6x_{4,1} + 8x_{4,2} + 11x_{4,3} + 2x_{4,4} + 2x_{4,5} + 10x_{4,6}
 \end{aligned}$$

$$\text{VINCOLI} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} + x_{1,5} + x_{1,6} = 5 \\ x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} + x_{2,5} + x_{2,6} = 6 \\ x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} + x_{3,5} + x_{3,6} = 2 \\ x_{4,1} + x_{4,2} + x_{4,3} + x_{4,4} + x_{4,5} + x_{4,6} = 9 \\ x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1} = 4 \\ x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} + x_{4,2} = 4 \\ x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} + x_{4,3} = 6 \\ x_{1,4} + x_{2,4} + x_{3,4} + x_{4,4} = 2 \\ x_{1,5} + x_{2,5} + x_{3,5} + x_{4,5} = 4 \\ x_{1,6} + x_{2,6} + x_{3,6} + x_{4,6} = 2 \end{array} \right.$$

*per tutte le  $x_{i,j} \geq 0$*

*– condizione di bilanciamento del sistema:*

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = \\ &= (5 + 6 + 2 + 9) = (4 + 4 + 6 + 2 + 4 + 2) = 22 \end{aligned}$$

A) Calcolo di una soluzione accettabile di base iniziale con la regola dell'angolo Nord-Ovest:

*Matrice dei trasporti*

		DESTINAZIONI						DISPONIBILITA'
		1	2	3	4	5	6	
O	1	4	1	0	0	0	0	5
RI	2	0	3	3	0	0	0	
GI	3	0	0	2	0	0	0	
NI	4	0	0	1	2	4	2	
RICHIESTE		4	4	6	2	4	2	22

$$\begin{aligned}
 Z = & (4 \cdot 9) + (1 \cdot 12) + (0 \cdot 9) + (0 \cdot 6) + (0 \cdot 9) + (0 \cdot 10) + \\
 & + (0 \cdot 7) + (3 \cdot 3) + (3 \cdot 7) + (0 \cdot 7) + (0 \cdot 5) + (0 \cdot 5) + \\
 & + (0 \cdot 6) + (0 \cdot 5) + (2 \cdot 9) + (0 \cdot 11) + (0 \cdot 3) + (0 \cdot 11) + \\
 & + (0 \cdot 6) + (0 \cdot 8) + (1 \cdot 11) + (2 \cdot 2) + (4 \cdot 2) + (2 \cdot 10) = \mathbf{139}
 \end{aligned}$$

B) Calcolo di una soluzione accettabile di base iniziale col **metodo dell'approssimazione di Vögel**:

**FASE 1**  
(Matrice dei costi)

		DESTINAZIONI						DISPON.	Differ.	
		1	2	3	4	5	6			
O	1	9	12	9	6	9	10	5	3	
RI	2	7	3	7	7	5	5 (*)		6	2
GI	3	6	5	9	11	3	11		2	2
NI	4	6	8	11	2	2	10		9	0
RICHIESTE		4	4	6	2	4	2	22		
Differenze		0	2	2	4	1	5			

**Penalità max.**

(\*) *prima assegnazione:  $x_{2,6} = 2$  unità* (minimo tra disponibilità e richieste di riga 2 e colonna 6).

**FASE 2**

		DESTINAZIONI						DISPON.	Differ.	
		1	2	3	4	5	6			
O	1	9	12	9	6	9	.	5	3	
RI	2	7	3	7	7	5	.		4	2
GI	3	6	5	9	11	3	.		2	2
NI	4	6	8	11	2 (*)	2	.		9	0
RICHIESTE		4	4	6	2	4	.	20		
Differenze		0	2	2	4	1	.			

**Penalità max.**

(\*) *seconda assegnazione:  $x_{4,4} = 2$  unità* (minimo tra disponibilità e richieste di riga 4 e colonna 4).

**FASE 3**

		DESTINAZIONI						DISPON.	Differ.
		1	2	3	4	5	6		
O	1	9	12	9	.	9	.	5	0
RI	2	7	3	7	.	5	.	4	2
GI	3	6	5	9	.	3	.	2	2
NI	4	6	8	11	.	2 (*)	.	7	4
<b>RICHIESTE</b>		4	4	6	.	4	.	18	
<b>Differenze</b>		0	2	2	.	1	.		

(\*) *terza assegnazione:  $x_{4,5} = 4$  unità* (minimo tra disponibilità e richieste di riga 4 e colonna 5).

**FASE 4**

		DESTINAZIONI						DISPON.	Differ.
		1	2	3	4	5	6		
O	1	9	12	9	.	.	.	5	0
RI	2	7	3 (*)	7	.	.	.	4	4
GI	3	6	5	9	.	.	.	2	1
NI	4	6	8	11	.	.	.	3	2
<b>RICHIESTE</b>		4	4	6	.	.	.	14	
<b>Differenze</b>		0	2	2	.	.	.		

Pen.Max

– quarta assegnazione:  $x_{2,2} = 4$  unità;

in questo caso si può procedere eliminando la riga 2 e la colonna 2.

### FASE 5

		DESTINAZIONI						DISPON.	Differ.
		1	2	3	4	5	6		
O	1	9	.	9	.	.	.	5	0
RI	2	.	.	.	.	.	.	.	.
GI	3	6	.	9	.	.	.	2	3
NI	4	6 (*)	.	11	.	.	.	3	5 Pen.Max
RICHIESTE		4	.	6	.	.	.	10	
Differenze		0	.	0	.	.	.		

(\*) quinta assegnazione:  $x_{4,1} = 3$  unità (minimo tra disponibilità e richieste di riga 4 e colonna 1).

### FASE 6

		DESTINAZIONI						DISPON.	Differ.
		1	2	3	4	5	6		
O	1	9	.	5 (***)	.	.	.	5	0
RI	2	.	.	.	.	.	.	.	.
GI	3	6 (*)	.	9 (**)	.	.	.	2	3 Pen.Max
NI	4	.	.	.	.	.	.	.	.
RICHIESTE		1	.	6	.	.	.	7	
Differenze		3	.	0	.	.	.		

Pen.Max

- (\*) - *sesta assegnazione:  $x_{3,1} = 1$  unità* (minimo tra disponibilità di riga 3 e colonna 1).
- (\*\*) - *settima assegnazione:  $x_{3,3} = 1$  unità* (minimo residuo tra disponibilità e richieste di riga 3 e colonna 3).
- (\*\*\*) - *ottava assegnazione:  $x_{1,3} = 5$  unità* (minimo residuo tra disponibilità e richieste di riga 1 e colonna 3).

**I Iterazione**  
**Matrice delle assegnazioni**

		DESTINAZIONI						DISPONIBILITA'
		1	2	3	4	5	6	
O	1	0	0	5	0	0	0	5
RI	2	0	4	0	0	0	2	6
GI	3	1	0	1	0	0	0	2
NI	4	3	0	0	2	4	0	9
RICHIESTE		4	4	6	2	4	2	22

La soluzione accettabile di base ottenuta è *degenere* in quanto fornisce solo 8 assegnazioni diverse da zero ( $m+n-2$ ) e non 9 cioè ( $m+n-1$ ). La funzione obiettivo assumerà il seguente valore:

$$\begin{aligned}
 Z = & (0 \cdot 9) + (0 \cdot 12) + (5 \cdot 9) + (0 \cdot 6) + (0 \cdot 9) + (0 \cdot 10) + \\
 & + (0 \cdot 7) + (4 \cdot 3) + (0 \cdot 7) + (0 \cdot 7) + (0 \cdot 5) + (2 \cdot 5) + \\
 & + (1 \cdot 6) + (0 \cdot 5) + (1 \cdot 9) + (0 \cdot 11) + (0 \cdot 3) + (0 \cdot 11) + \\
 & + (3 \cdot 6) + (0 \cdot 8) + (0 \cdot 11) + (2 \cdot 2) + (4 \cdot 2) + (0 \cdot 10) = \mathbf{112}
 \end{aligned}$$

E' necessario cercare un'altra soluzione che fornisca però 9 incognite diverse da zero ( $n+m-1$ ) e che preveda quindi altrettante assegnazioni ai punti di destinazione.

Si ritorni alla matrice della "fase 4" della precedente iterazione e si assegnino 4 unità alla casella (2,3) anzichè in quella (2,2).

### FASE 7

		DESTINAZIONI						DISPON.	Differ.
		1	2	3	4	5	6		
O	1	9	12	9	.	.	.	5	0
RI	2	7	3	7 (*)	.	.	.	4	4
GI	3	6	5	9	.	.	.	2	1
NI	4	6	8	11	.	.	.	3	2
RICHIESTE		4	4	6	.	.	.	14	
Differenze		0	2	2	.	.	.		

Pen.Max

(\*) quarta assegnazione:  $x_{2,3} = 4$  unità

### FASE 8

		DESTINAZIONI						DISPON.	Differ.
		1	2	3	4	5	6		
O	1	9	12	9	.	.	.	5	0
RI	2	.	.	.	.	.	.	.	.
GI	3	6	5 (*)	9	.	.	.	2	1
NI	4	6	8	11	.	.	.	3	2
RICHIESTE		4	4	2	.	.	.	10	
Differenze		0	3	0	.	.	.		

Pen.Max

(\*) quinta assegnazione:  $x_{3,2} = 2$  unità

### FASE 9

		DESTINAZIONI						DISPON.	Differ.
		1	2	3	4	5	6		
O	1	9	12	9	.	.	.	5	0
RI	2	.	.	.	.	.	.		.
GI	3	.	.	.	.	.	.		.
NI	4	6	8 (*)	11	.	.	.		3
RICHIESTE		4	2	2	.	.	.	8	
Differenze		3	4	2	.	.	.		

Pen.Max

(\*) *sesta assegnazione:  $x_{4,2} = 2$  unità*

### FASE 10

		DESTINAZIONI						DISPON.	Differ.
		1	2	3	4	5	6		
O	1	9 (**)	.	9 (***)	.	.	.	5	0
RI	2	.	.	.	.	.	.		.
GI	3	.	.	.	.	.	.		.
NI	4	6 (*)	.	11	.	.	.		1
RICHIESTE		4	.	2	.	.	.	6	
Differenze		3	.	2	.	.	.		

Pen.Max

(\*) *settima assegnazione:  $x_{4,1} = 1$  unità*

(\*\*) *ottava assegnazione:  $x_{1,1} = 3$  unità*

(\*\*\*) *nona assegnazione:  $x_{1,3} = 2$  unità*

**II ITERAZIONE**  
**Matrice delle assegnazioni**

		DESTINAZIONI						DISPONIBILITA'
		1	2	3	4	5	6	
O	1	3	0	2	0	0	0	5
RI	2	0	0	4	0	0	2	6
GI	3	0	2	0	0	0	0	2
NI	4	1	2	0	2	4	0	9
RICHIESTE		4	4	6	2	4	2	22

La soluzione trovata è accettabile di base *non degenera* in quanto ammette 9 assegnazioni maggiori di zero  $[(n+m-1) = (4+6-1) = 9]$ . La funzione obiettivo assume quindi il seguente valore.

$$\begin{aligned}
 Z = & (3 \cdot 9) + (0 \cdot 12) + (2 \cdot 9) + (0 \cdot 6) + (0 \cdot 9) + (0 \cdot 10) + \\
 & + (0 \cdot 7) + (0 \cdot 3) + (4 \cdot 7) + (0 \cdot 7) + (0 \cdot 5) + (2 \cdot 5) + \\
 & + (0 \cdot 6) + (2 \cdot 5) + (0 \cdot 9) + (0 \cdot 11) + (0 \cdot 3) + (0 \cdot 11) + \\
 & + (1 \cdot 6) + (2 \cdot 8) + (0 \cdot 11) + (2 \cdot 2) + (4 \cdot 2) + (0 \cdot 10) = \mathbf{127}
 \end{aligned}$$

C) - Ricerca della soluzione ottima.

**FASE 11**  
**Matrice dei costi delle assegnazioni**  
 $C_{ij} = u_i + v_j$

	1	2	3	4	5	6	u(i)
1	9 	· 	9 	· 	· 	· 	3
2	· 	· 	7 	· 	· 	5 	1
3	· 	5 	· 	· 	· 	· 	-3
4	6 	8 	· 	2 	2 	· 	0
v(j)	6	8	6	2	2	4	

**FASE 12**

*Matrice dei costi delle caselle senza assegnazioni -  $C_{ij}$  e  $(u_i + v_j)$*

	1	2	3	4	5	6	$u(i)$
1	. ┌ └ .	12 ┌ └ 11	. ┌ └ .	6 ┌ └ 5	9 ┌ └ 5	10 ┌ └ 7	3
2	7 ┌ └ 7	3 ┌ └ 9	. ┌ └ .	7 ┌ └ 3	5 ┌ └ 3	. ┌ └ .	1
3	6 ┌ └ 3	. ┌ └ .	9 ┌ └ 3	11 ┌ └ -1	3 ┌ └ -1	11 ┌ └ 1	-3
4	. ┌ └ .	. ┌ └ .	11 ┌ └ 6	. ┌ └ .	. ┌ └ .	10 ┌ └ 4	0
$v(j)$	6	8	6	2	2	4	

### FASE 13

*Matrice delle valutazioni -  $\delta_{i,j} = C_{i,j} - (u_i + v_j)$*

	1	2	3	4	5	6
1	.	.	.	.	.	.
	.	1	.	1	4	3
2	.	<b>-6</b>	.	.	.	.
	0	-6	.	4	2	.
3	.	.	.	.	.	.
	3	.	6	12	4	10
4	.	.	.	.	.	.
	.	.	5	.	.	6

Essendo la valutazione  $\delta_{2,2} < 0$  si deduce che la soluzione accettabile di base trovata non è quella ottima e si dovrà quindi procedere ad una successiva iterazione.

Occorre quindi ricercare una nuova soluzione accettabile di base che permetta di ridurre il costo totale del trasporto effettuando la massima assegnazione possibile. L'assegnazione alla casella (2,2), dove  $\delta_{2,2} < 0$ , è quella che ci permette di ridurre il costo totale del trasporto e della funzione obiettivo.

Ricorrendo al metodo dello *stepping-stone* si possono aggiungere 2 unità nella casella (2,2) effettuando di conseguenza i seguenti spostamenti nella matrice dei trasporti.

- casella (4,2) → (-2) unità;
- casella (4,1) → +2 unità;
- casella (1,1) → (-2) unità;
- casella (1,3) → +2 unità;
- casella (2,3) → (-2) unità;

– casella (2,2) →

+2 unità;

**III ITERAZIONE**  
*destinazioni*

		DESTINAZIONI						DISPONIBILITA'
		1	2	3	4	5	6	
O	1	1 (-2)	0	4 (+2)	0	0	0	5
RI	2	0	2 (+2)	2 (-2)	0	0	2	6
GI	3	0	2	0	0	0	0	2
NI	4	3 (+2)	0 (-2)	0	2	4	0	9
RICHIESTE		4	4	6	2	4	2	22

























Si procede ricalcolando la matrice delle valutazioni (vedasi fase 13) per la nuova soluzione di base.

$$\begin{aligned}
 Z = & (1 \cdot 9) + (0 \cdot 12) + (4 \cdot 9) + (0 \cdot 6) + (0 \cdot 9) + (0 \cdot 10) + \\
 & + (0 \cdot 7) + (2 \cdot 3) + (2 \cdot 7) + (0 \cdot 7) + (0 \cdot 5) + (2 \cdot 5) + \\
 & + (0 \cdot 6) + (2 \cdot 5) + (0 \cdot 9) + (0 \cdot 11) + (0 \cdot 3) + (0 \cdot 11) + \\
 & + (3 \cdot 6) + (0 \cdot 8) + (0 \cdot 11) + (2 \cdot 2) + (4 \cdot 2) + (0 \cdot 10) = \mathbf{115}
 \end{aligned}$$

La soluzione trovata è accettabile di base in quanto ammette  $[(n+m-1) = 9]$  assegnazioni positive. La funzione obiettivo assume valore 115 e pertanto il risultato è migliorativo rispetto alla soluzione precedente dove il costo totale era di 127.

**FASE 14**

*Matrice dei costi delle assegnazioni -  $C_{ij} = (u_i + v_j)$*

	1	2	3	4	5	6	$u(i)$
1	9 	. 	9 	. 	. 	. 	3
2	. 	3 	7 	. 	. 	5 	1
3	. 	5 	. 	. 	. 	. 	3
4	6 	. 	. 	2 	2 	. 	0
$v(j)$	6	2	6	2	2	4	

**FASE 15**

*Matrice dei costi delle caselle senza assegnazioni -  $C_{i,j}$  e  $(u_i + v_j)$*

	1	2	3	4	5	6	$u(i)$
1	. ┌───┐ │   │ └───┘ .	12 ┌───┐ │   │ └───┘ 5	. ┌───┐ │   │ └───┘ .	6 ┌───┐ │   │ └───┘ 5	9 ┌───┐ │   │ └───┘ 5	10 ┌───┐ │   │ └───┘ 7	3
2	7 ┌───┐ │   │ └───┘ 7	. ┌───┐ │   │ └───┘ .	. ┌───┐ │   │ └───┘ .	7 ┌───┐ │   │ └───┘ 3	5 ┌───┐ │   │ └───┘ 3	. ┌───┐ │   │ └───┘ .	1
3	6 ┌───┐ │   │ └───┘ 9	. ┌───┐ │   │ └───┘ .	9 ┌───┐ │   │ └───┘ 9	11 ┌───┐ │   │ └───┘ 5	3 ┌───┐ │   │ └───┘ 5	11 ┌───┐ │   │ └───┘ 7	3
4	. ┌───┐ │   │ └───┘ .	8 ┌───┐ │   │ └───┘ 2	11 ┌───┐ │   │ └───┘ 6	. ┌───┐ │   │ └───┘ .	. ┌───┐ │   │ └───┘ .	10 ┌───┐ │   │ └───┘ 4	0
$v(j)$	6	2	6	2	2	4	

### FASE 16

*Matrice delle valutazioni -  $\delta_{i,j} = C_{i,j} - (u_i + v_j)$*

	1	2	3	4	5	6
1	.	.	.	.	.	.
.	.	7	.	1	4	3
2	.	.	.	.	.	.
.	0	.	.	4	2	.
3	.	.	.	.	.	.
.	-3	.	0	6	-2	4
4	.	.	.	.	.	.
.	.	6	5	.	.	6

Le valutazioni  $\delta_{3,1}$  e  $\delta_{3,5}$  sono negative e quindi la soluzione di base trovata non è ancora quella ottima.

Si procede ricercando un'altra soluzione di base che permetta di ridurre ulteriormente il costo totale del trasporto. Si effettua la massima assegnazione possibile alla casella (3,1) cioè in corrispondenza della *valutazione negativa*  $[C_{i,j} - (u_i + v_j)]$  di valore massimo.

Ricorrendo ancora al metodo dello *stepping-stone* si può aggiungere 1 unità nella casella (3,1) effettuando di conseguenza i seguenti spostamenti nella matrice dei trasporti.

- casella (3,2) → (-1) unità;
- casella (3,1) → +1 unità;
- casella (1,1) → (-1) unità;
- casella (1,3) → +1 unità;
- casella (2,3) → (-1) unità;
- casella (2,2) → +1 unità;

### IV ITERAZIONE

		DESTINAZIONI						DISPONIBILITA'
		1	2	3	4	5	6	
O	1	0 (-1)	0	5 (+1)	0	0	0	5
RI	2	0	3 (+1)	1 (-1)	0	0	2	6
GI	3	1 (+1)	1 (-1)	0	0	0	0	2
NI	4	3	0	0	2	4	0	9
<b>RICHIESTE</b>		4	4	6	2	4	2	22

La soluzione trovata è accettabile di base in quanto ammette 9 assegnazioni maggiori di zero. La funzione obiettivo assume valore 112 e pertanto un valore inferiore rispetto a quanto ottenuto con la precedente iterazione (115).

$$\begin{aligned}
 Z = & (0 \cdot 9) + (0 \cdot 12) + (5 \cdot 9) + (0 \cdot 6) + (0 \cdot 9) + (0 \cdot 10) + \\
 & + (0 \cdot 7) + (3 \cdot 3) + (1 \cdot 7) + (0 \cdot 7) + (0 \cdot 5) + (2 \cdot 5) + \\
 & + (1 \cdot 6) + (1 \cdot 5) + (0 \cdot 9) + (0 \cdot 11) + (0 \cdot 3) + (0 \cdot 11) + \\
 & + (3 \cdot 6) + (0 \cdot 8) + (0 \cdot 11) + (2 \cdot 2) + (4 \cdot 2) + (0 \cdot 10) = \mathbf{112}
 \end{aligned}$$

Si effettui anche per la nuova soluzione il calcolo delle valutazioni.

FASE 17

Matrice dei costi delle assegnazioni -  $C_{ij} = (u_i + v_j)$

	1	2	3	4	5	6	$u(i)$
1	.	.	9	.	.	.	0
2	.	3	7	.	.	5	-2
3	6	5	.	.	.	.	0
4	6	.	.	2	2	.	0
$v(j)$	6	5	9	2	2	7	

**FASE 18**

*Matrice dei costi delle caselle senza assegnazioni -  $C_{i,j}$  e  $(u_i + v_j)$*

	1	2	3	4	5	6	$u(i)$
1	9 6	12 5	. .	6 2	9 2	10 7	0
2	7 4	. .	. .	7 0	5 0	. .	-2
3	. .	. .	9 9	11 2	3 2	11 7	0
4	. .	8 5	11 9	. .	. .	10 7	0
$v(j)$	6	5	9	2	2	7	

### FASE 19

Matrice delle valutazioni -  $\delta_{i,j} = C_{i,j} - (u_i + v_j)$

	1	2	3	4	5	6
1	.	.	.	.	.	.
	3	7	.	4	7	3
2	.	.	.	.	.	.
	3	.	.	7	5	.
3	.	.	.	.	.	.
	.	.	0	9	1	4
4	.	.	.	.	.	.
	.	3	2	.	.	3

Le valutazioni sono tutte positive ad eccezione di quella posta nella casella (3,3) che è uguale a zero. La soluzione di base trovata pertanto è ottima ma il sistema ammette anche un'altra soluzione ottima che si può ottenere spostando una unità nella casella (3,3) della matrice dei trasporti che è quella con valutazione uguale a zero. Il ciclo dello spostamento delle assegnazioni è il seguente:

- casella (2,3) → (-1) unità;
- casella (2,2) → +1 unità;
- casella (3,2) → (-1) unità;
- casella (3,3) → +1 unità;

La soluzione alternativa è però *degenera* in quanto ha solo 8 assegnazioni ( $n+m-2$ ) positive ma consente di effettuare i trasporti sempre al costo minimo e pari al valore della funzione obiettivo della precedente iterazione.

### *V ITERAZIONE*

		DESTINAZIONI						DISPONIBILITA'
		1	2	3	4	5	6	
<b>O</b>	<b>1</b>	0	0	5	0	0	0	5
<b>RI</b>	<b>2</b>	0	4 (+1)	0 (-1)	0	0	2	6
<b>GI</b>	<b>3</b>	1	0 (-1)	1 (+1)	0	0	0	2
<b>NI</b>	<b>4</b>	3	0	0	2	4	0	9
<b>RICHIESTE</b>		4	4	6	2	4	2	22

$$\begin{aligned}
 Z = & (0 \cdot 9) + (0 \cdot 12) + (5 \cdot 9) + (0 \cdot 6) + (0 \cdot 9) + (0 \cdot 10) + \\
 & + (0 \cdot 7) + (4 \cdot 3) + (0 \cdot 7) + (0 \cdot 7) + (0 \cdot 5) + (2 \cdot 5) + \\
 & + (1 \cdot 6) + (0 \cdot 5) + (1 \cdot 9) + (0 \cdot 11) + (0 \cdot 3) + (0 \cdot 11) + \\
 & + (3 \cdot 6) + (0 \cdot 8) + (0 \cdot 11) + (2 \cdot 2) + (4 \cdot 2) + (0 \cdot 10) = \mathbf{112}
 \end{aligned}$$

## - IV - L'ASSEGNAZIONE

### 4.1 - NATURA DEL PROBLEMA.

Il Problema dell'Assegnazione (*nella bibliografia anglosassone "Assignment Problem"*) è un caso speciale e più ridotto del Problema del Trasporto.

Per la sua struttura molto semplice può essere considerato come il caso più elementare della *programmazione lineare*. Viene risolto con una particolare procedura che è molto più efficace di quella del semplice.

La formulazione matematica del *problema del trasporto* si riduce a quello *dell'Assegnazione* quando:

$$m = n \text{ e } a_i = 1 \text{ per tutte le } (i = 1,2,3,\dots,n)$$

$$b_j = 1 \text{ per tutte le } (j = 1,2,3,\dots,n)$$

$$x_{i,j} \begin{cases} = 1 \\ = 0 \end{cases}$$

Ciò vuol dire che il numero delle origini deve essere uguale al numero delle destinazioni e che ogni disponibilità deve corrispondere a ogni richiesta. In altre parole ogni fonte (assegnataria) è assegnata alla sua destinazione (assegnazione).

La soluzione del problema ci permette di determinare le assegnazioni che minimizzano il costo totale nel sistema, dati i costi

unitari di assegnazione tra le fonti assegnatarie e le rispettive destinazioni:

$$c_{i,j} > 0 \text{ per } (i,j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

Il numero possibile di soluzioni del problema corrisponde al numero di permutazioni ( $n$  a  $n$ ):

$$P(n) = n!$$

**Esempio:**

La seguente matrice di trasporto è ridotta al tipico caso dell'assegnazione:

		DESTINAZIONI				DISPONIBILITA'
		1	2	3	4	
ORIGINI	1	0	1	0	0	1
	2	0	0	0	1	1
	3	1	0	0	0	1
	4	0	0	1	0	1
RICHIESTE		1	1	1	1	

**4.2 - MODELLO MATEMATICO.**

Il modello matematico del *Problema dell'Assegnazione* può essere schematizzato come segue:



**Matrice dei costi unitari**

		DESTINAZIONI				
		1	2	3	.....	n
ORIGINI	1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	$C_{1,3}$	$C_{1,4}$	$C_{1,n}$
	2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	$C_{2,3}$	$C_{2,4}$	$C_{2,n}$
	3	.....	.....	.....	.....	.....
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	(n-1)	$C_{(n-1),1}$	$C_{(n-1),2}$	$C_{(n-1),3}$	$C_{(n-1),4}$	$C_{(n-1),n}$
n	$C_{n,1}$	$C_{n,2}$	$C_{n,3}$	$C_{n,4}$	$C_{n,n}$	

La funzione obiettivo da minimizzare è la seguente:

$$Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{i,j} \cdot x_{i,j}$$

sottoposta ai seguenti vincoli:

$$\sum_{i=1}^n x_{i,j} = \sum_{j=1}^n x_{i,j} = 1$$

per  $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$

$$e \ x_{i,j} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

### 4.3 - PROCEDURA RISOLUTIVA.

La soluzione ottimale di un *problema di assegnazione* viene ricercata operando direttamente sulla *matrice dei costi unitari* senza tenere conto delle quantità  $x_{i,j}$  come avviene negli altri problemi di *programmazione lineare* dato che queste assumono valore uno o valore zero. Il procedimento risolutivo consiste nel convertire la matrice dei costi unitari originari in altra matrice di costi equivalenti che consente di individuare in modo ovvio la soluzione ottimale.

In altre parole si tratta di ridurre la matrice dei costi unitari originari in una matrice composta solo da elementi positivi o nulli la quale ci indicherà che le assegnazioni ottimali dovranno essere effettuate in corrispondenza dei valori nulli che sono i minimi possibili (tenendo presente che i costi non sono mai negativi).

La chiave del procedimento è data dal seguente teorema:

**“è possibile aggiungere o togliere da ogni elemento di una riga o di una colonna della *matrice dei costi unitari* una determinata costante ( $\alpha$ ) senza per questo variare la soluzione ottimale del problema di assegnazione”.**

Ciò è evidente in quanto una soluzione non può contenere che assegnazioni uguali a uno. Il valore della funzione economica sarà aumentato o diminuito della costante  $\alpha$ , ma per questo non verrà variata la soluzione ottimale.

#### ***Procedura:***

##### *1° Fase: "Determinazione degli zeri"*

A tutti gli elementi di una stessa riga si toglie il più piccolo elemento della riga stessa, poi nella matrice così ottenuta si toglie da tutti gli elementi di una stessa colonna il più piccolo elemento della colonna. In tal modo è possibile ottenere una nuova matrice  $C'_{i,j}$  avente almeno uno zero per riga e per colonna.

*2° Fase: " Ricerca di una soluzione ottima "*

Nelle posizioni della matrice  $C'_{ij}$  con valore zero si cerchi di formare una soluzione di valore zero, cioè un insieme di  $n$  assegnazioni ove tutti i  $C'_{ij}$  sono nulli. Per ogni riga o colonna con un solo elemento nullo, riservare quella posizione per un'assegnazione mediante l'inquadratura dello zero stesso ed eliminare le altre posizioni con elementi nulli sulle linee che si incontrano barrando gli zeri.

Procedere in tal modo anche per le altre righe o colonne che contengono zeri non barrati fino ad esaurimento.

Se le posizioni assegnate comprendono un insieme completo di  $n$  assegnazioni allora si avrà trovato una soluzione ottima, altrimenti si passa alla 3° fase.

*3° Fase: "Trovare un insieme minimo di righe e colonne contenenti tutti valori zero"*

- a) segnare con un asterisco tutte le righe che non contengono alcuno zero inquadrato;
- b) segnare tutte le colonne che hanno uno o più zeri barrati in una delle righe segnate;
- c) segnare tutte le righe che hanno uno zero inquadrato nelle colonne segnate;
- d) ripetere i passi (b) e (c) finché non sia più possibile segnare alcuna riga o colonna;
- e) tracciare una linea su ogni riga non segnata e su ogni colonna segnata.

*4° Fase: "Spostamento eventuale degli zeri"*

Esaminare tutti gli elementi non coperti da una linea, prendere il più piccolo di questi e sottrarlo dagli elementi non segnati, poi sommarlo ad ogni elemento che sta sull'intersezione di due linee. Si

osservi che, in forza del teorema precedentemente enunciato, la procedura non modifica la soluzione ottimale del problema.

*5° Fase: "Verifica della soluzione con eventuale ripetizione del ciclo "*

Ripetere la 2° fase sulla nuova matrice ottenuta  $C''_{ij}$ . Se si ottiene una soluzione completa questa è ottimale, altrimenti si deve continuare dalla 2° fase.

La soluzione ottima potrebbe anche non essere unica.

#### **4.4 - RICERCA DI UN MASSIMO.**

In certi problemi di assegnazione ci si propone l'obiettivo di cercare la soluzione che massimizza la funzione obiettivo. In questo caso si opererà come segue:

a) Si determini il costo unitario (o meglio l'efficienza unitaria)  $C$  più elevato di tutta la matrice  $C_{ij}$ .

$$C = \max_{i,j} C_{i,j}$$

b) Si detragga tale costo (o efficienza) da tutti gli altri della matrice e si ottenga una nuova matrice  $C'_{ij}$  formata da numeri negativi o nulli.

$$C'_{i,j} = C_{i,j} - C$$

c) Si cambi il segno a tutti gli elementi  $C'_{ij}$  e si definisca così una nuova matrice  $C''_{ij}$  con elementi:

$$C''_{i,j} = - C'_{i,j} = C - C_{i,j}$$

dove

$$C_{i,j} = C - C''_{i,j}$$

E' evidente che il massimo del problema di assegnazione con la matrice  $C'_{ij}$  corrisponde al minimo di quello con matrice  $C''_{ij}$ . Pertanto il problema verrà risolto ricercando la soluzione ottimale sulla matrice  $C''_{ij}$  col metodo precedentemente visto.

#### 4.5 - ESERCIZIO.

Si voglia trovare la soluzione ottimale per il *problema di assegnazione* avente la seguente matrice dei costi unitari:

*Matrice  $[C_{ij}]$  dei costi unitari*

	1	2	3	4	5
A	11	17	8	16	20
B	9	7	12	6	15
C	13	16	15	12	16
D	21	24	17	28	26
E	14	10	12	11	15

#### *Soluzione*

##### *1° Fase:*

Si sottragga il costo unitario più piccolo di ciascuna riga e colonna dagli altri elementi della riga o colonna.

	1	2	3	4	5
A	3	9	0	8	12
B	3	1	6	0	9
C	1	4	3	0	4
D	4	7	0	11	9
E	4	0	2	1	5

*Matrice  $[C'_{i,j}]$*

	1	2	3	4	5
A	2	9	0	8	8
B	2	1	6	0	5
C	0	4	3	0	0
D	3	7	0	11	5
E	3	0	2	1	1

2° Fase.

Si effettuano le assegnazioni nelle righe (A), (B), (E) che contengono un solo elemento uguale a zero nelle posizioni (A,3), (B,4) e (E,2) e si eliminano perciò le posizioni (D,3) e (C,4).

	1	2	3	4	5
A			0		
B				0	
C	0			∅	0
D			∅		
E		0			

Poi si procede sulle colonne effettuando l'assegnazione (C,1) ed eliminando di conseguenza (C,5).

	1	2	3	4	5
A			0		
B				0	
C	0			∅	∅
D			∅		
E		0			

Si può osservare che le assegnazioni sono solo 4 anziché 5 pertanto la soluzione trovata non è completa.

Occorre passare alla 3° fase della procedura.

3° Fase.

Si tracci il minor numero possibile di linee per coprire tutti gli elementi nulli.

Si segni con un asterisco la riga (D) che non contiene alcun zero inquadrate, poi si segni la colonna (3) che contiene uno zero barrato in (D,3) e la riga (A) che contiene uno zero inquadrate.

Si evidenzino poi le righe (B), (C), (E) che non sono state segnate e la colonna (3) segnata.

	1	2	3	4	5	
A	2	9	0	8	8	*
B	2	1	6	0	5	
C	0	4	3	0	0	
B	3	7	0	11	5	*
E	3	0	2	1	1	

4° Fase.

Si prenda l'elemento  $[(A,I)= 2]$  che è il più piccolo di quelli non coperti e lo si sottragga da tutti gli altri e poi lo si sommi a quelli d'intersezione sulla colonna (3).

*Matrice  $C'_{ij}$*

	1	2	3	4	5
A	0	7	0	6	6
B	2	1	8	0	5
C	0	4	5	0	0
D	1	5	0	9	3
E	3	0	4	1	1

*5° Fase.*

Si procede ad effettuare le assegnazioni nelle righe e poi nelle colonne che contengono un solo zero eliminando gli altri zeri nelle corrispondenti colonne o righe.

In ordine le assegnazioni sono:

- 1 assegnazione in **(B,4)** con eliminazione di **(C,4)**;
- 1 assegnazione in **(D,3)** con eliminazione di **(A,3)**;
- 1 assegnazione in **(E,2)**;
- 1 assegnazione in **(C,5)** con eliminazione di **(C,1)**;
- 1 assegnazione in **(A,1)**;

*- Matrice  $C''_{ij}$  -*

	1	2	3	4	5
A	0	7	∅	6	6
B	2	1	8	0	5
C	∅	4	5	∅	0
D	1	5	0	9	3
E	3	0	4	1	1

La soluzione trovata è completa in quanto ammette ( $n=5$ ) assegnazioni e quindi è quella ottimale che comporta un costo minimo di 60.

$$\begin{aligned} z''(\min) &= C''(\mathbf{A1}) + C''(\mathbf{E2}) + C''(\mathbf{D3}) + C''(\mathbf{B4}) + C''(\mathbf{C5}) = \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(\min) &= C(\mathbf{A1}) + C(\mathbf{E2}) + C(\mathbf{D3}) + C(\mathbf{B4}) + C(\mathbf{C5}) = \\ &= 11 + 10 + 17 + 6 + 16 = 60 \end{aligned}$$

si può constatare che la procedura applicata ha consentito di giungere alla soluzione ottima rapidamente con pochi passaggi.

Ciò in considerazione dal fatto che le soluzioni possibili del problema sono:

$$P(5) = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

## BIBLIOGRAFIA

- L. Kleinrock - QUEUEING SYSTEMS - Wiley Interscience Publ. 1976
- M Cugiani - A. Liverani - INTRODUZIONE ALL'ANALISI COMPUTAZIONALE - UTET 1988
- F. Pesarin - ELEMENTI DI CALCOLO DELLE PROBABILITA' - CLEUP Padova - apr. 1981
- G. Landenna - STATISTICA (parte terza e quarta) - CELUC Milano 1981
- F. Neelamkavil - COMPUTER SIMULATION AND MODELLING - John Wiley & Sons 1987
- G. S. Fishman - MONTE CARLO; CONCEPTS, ALGORITHMS AND APPLICATIONS - Springer 1999
- J.F. Magge - D.M. Boodman - PROGRAMMAZIONE DELLA PRODUZIONE E CONTROLLO DELLE SCORTE - Angeli Milano 1986
- M.K. Stark - D.W.Miller - INVENTORY CONTROL: THEORY AND PRACTICE - Prentice hall 1974
- L.A.Johnson - D.C. Montgomery - OPERATIONS RESEARCH IN PRODUCTION PLANNING: SCHEDULING AND INVENTORY CONTROL - John Wiley & Sons 1974
- L. Hax - J. Candea - PRODUCTION AND INVENTORY CONTROL - Englewood Cliff 1984
- F.S.Hillier - G.J.Liebermann - INTRODUCTION TO OPERATIONS RESEARCH (terza edizione) - Holden Day - Los Angeles 1985

# EBOOK

Pubblicazioni dell'I.S.U. Università Cattolica  
<http://www.unicatt.it/librario>  
versione digitale 2007  
ISBN 978-88-8311-035-1